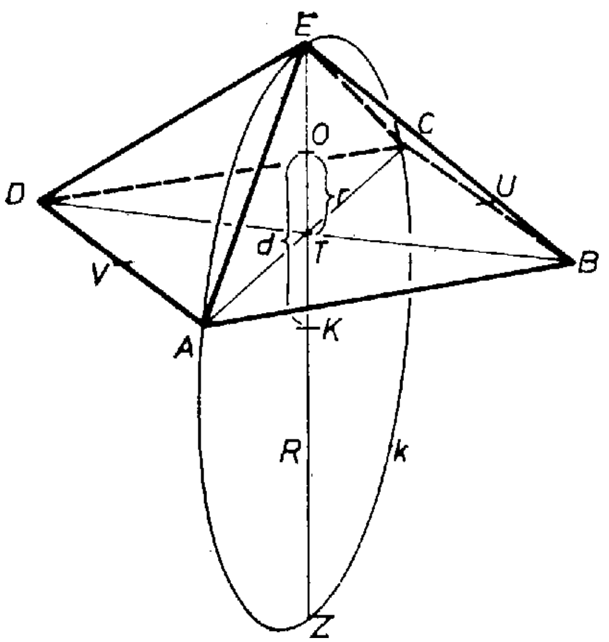
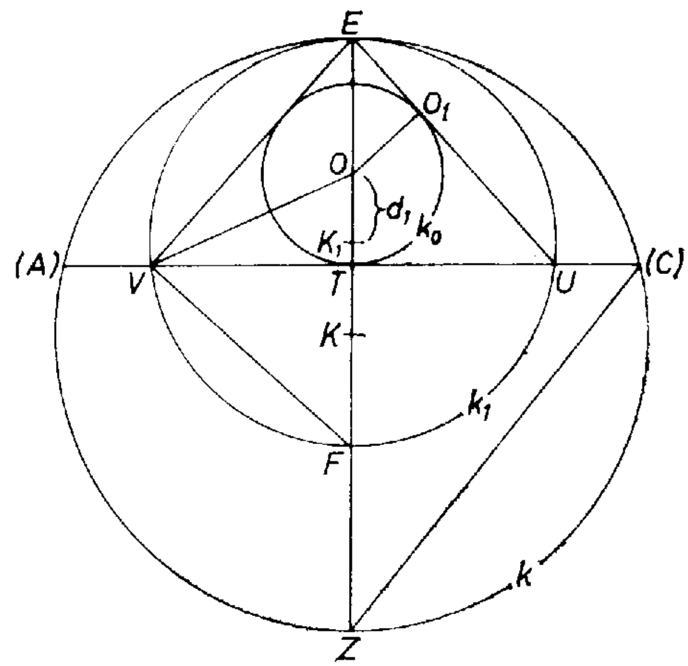
Jelöljük az alap csúcsait A, B, C, D-vel, középpontját T-vel, a gúla ötödik csúcsát E-vel, a beírt gömböt G_0-lal, középpontját O-val, a körülírt gömböt G-vel, középpontját K-val. Mivel a gúla egyenes, és alapja szabályos sokszög, O és K rajta van az ET egyenesen. Emellett K-t egyértelműen meghatározza az, hogy G átmegy az A, C, E pontokon. Jelöljük a BC, DA szakaszok felezőpontját U-val, V-vel. Mivel a gúla szimmetrikus az UVE síkra, G_0 az UVE háromszög oldalain érinti az oldalakat tartalmazó lapokat. Más szóval G_0-ból az UVE sík az UVE háromszögbe írt k_0 kört metszi ki.





Jelöljük az UVE háromszög köré írt kört k_1-gyel, középpontját K_1-gyel, sugarát R_1-gyel, az E-vel átellenes pontját F-fel. Az FOV háromszögben

$$2FVO\sphericalangle = UVE\sphericalangle + UEV\sphericalangle,$$
$$2FOV\sphericalangle = 180^\circ - UVE\sphericalangle = VUE\sphericalangle + UEV\sphericalangle,$$

emiatt $OF = VF$. Jelöljük még O-nak UE-n levő vetületét O_1-gyel. Mivel az EFV, EOO_1 háromszögek hasonlók,

$$VF : EF = OO_1 : EO,$$

vagyis $EO \cdot OF = EO \cdot VF = EF \cdot OO_1 = 2rR_1$. Jelöljük a K_1O szakasz hosszát d_1-gyel, akkor az EO, OF szakaszok közül az egyik hossza $(R_1 + d_1)$, a másiké $(R_1 - d_1)$, tehát

(2) $$R_1^2 - d_1^2 = 2rR_1.$$

Ez Euler tétele, és ugyan a levezetésében részben kihasználtuk, hogy UVE egyenlő szárú, valójában erre nem volt szükségünk, mint ismeretes, meggondolásunk tetszőleges háromszögre kiterjeszthető.

Jelöljük G-nek az ACE síkkal alkotott metszés vonalát k-val, k-nak E-vel átellenes pontját Z-vel. Ekkor

$$ET \cdot TZ = TC^2 = 2TU^2 = 2ET \cdot TF,$$

tehát $TZ = 2TF$. Emiatt

$$2R_1 = EF = 2R - FZ = 2R - TF = 2R + r - OF,$$

és így (2) alapján kapjuk, hogy

$$R^2 - d^2 = EO \cdot OZ = EO \cdot OF + EO \cdot OF - EO \cdot OT =$$
$$= r(2R + r - OF) + 2rR_1 - r \cdot EO = r(2R + r) + r(2R_1 - OF - EO).$$

Mivel $EO + OF = 2R_1$, itt az utolsó tag 0, tehát épp azt kaptuk, amit bizonyítani akartunk.

A most bizonyított (1) összefüggés alapján ha $R = 1$, akkor $(1 + r)^2 = 2 - d^2$, tehát $(1 + r)^2$ maximuma 2, r maximuma $\sqrt{2} - 1$. Ez akkor érhető el, ha $d = 0$, vagyis K és O egybeesik. Ugyanazt kaptuk tehát, mint a F. 2096. megoldásában (KÖMAL 1978. január, 6–7. oldal).