I. rész

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre

$$\left.\begin{array}{l}\left(x^2+5\right)^2 = 25-|y-3| \\ 21x+63y=188\end{array}\right\}. \qquad (\textit{11 pont})$$

2. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = ax^2 + (2a+b)x - (b^2 - b - a)$$

függvényt.

a) Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok, akkor

$$f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$$

osztható 5-tel.

b) Igazoljuk, hogy ha a pozitív, akkor $f(x)$-nek van zérushelye. (*12 pont*)

3. Hány darab 2-nél kisebb, pozitív tagja van az $a_n = -5 + \log_2(n+4)$ sorozatnak? (*14 pont*)

4. Ágnes 2005. március 25-én befizet 600 000 Ft-ot egy olyan bankba, ahol az évi kamat 8%-os és a naptári év végén van kamatelszámolás. Mennyi lesz a követelése 2006. március 25-én? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott három egyenes az egyenletével:

$$x - \sqrt{3}y = 0, \quad \sqrt{3}x - y = 0, \quad \sqrt{3}x + y - 10 = 0.$$

a) Mutassuk meg, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.

b) Mekkora a háromszög köré írt körének a sugara?

c) Számítsuk ki a beírt kör középpontjának a koordinátáit. (*16 pont*)

6. Adott a valós számokon értelmezett, $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2$ függvény.

a) Határozzuk meg az $f\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)$ pontos értékét.

b) Mutassuk meg, hogy az $f(\sin\alpha) + f(\cos\alpha)$ összeg nem függ α értékétől. (*16 pont*)

7. Egy középiskolában azt tapasztaltuk, hogy a tanulók 75%-a elkészíti a házi feladatát matematikából. Egy újságíró ebben az iskolában öt véletlenszerűen választott tanulóval szeretne beszélgetni a tanulási szokásaikról.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy olyan tanulókat választ, akiknek készen van a házi feladata?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az öt választott tanulóból legalább háromnak készen van a házi feladata?

c) Az iskola 20 fős 12.c. osztályában (ahol az iskolai átlagnál egy kicsit jobb a helyzet) 16-an írtak házi feladatot. A csoportban összesen 3 leány van, ők mindig elkészítik feladataikat. Ha ebből a csoportból választunk 4 fiút és 1 leányt, akkor mekkora a valószínűsége, hogy a választottak közül pontosan kettőnek nincs kész a házi feladata? (*16 pont*)

8. Egy 27 méter széles folyó partjától merőlegesen haladva 3 méterenként megmértük a víz mélységét. A következő adatokat kaptuk centiméterben: 60, 120, 150, 240, 210, 180, 90, 30.

a) Hány m^2 a keresztmetszet területe, ha a folyómeder alján két méréshely között az összekötővonalat egyenesnek feltételezzük?

b) A mért adatoknak határozzuk meg a számtani közepét és a mediánját.

c) Mennyi a mérés vonalában a folyó átlagos mélysége?

d) Mekkora vízmennyiség halad át a folyó keresztmetszetén 1 óra alatt, ha a folyó sebessége 85 m/perc? (*16 pont*)

9. Az azonos kerületű konvex négyszögek esetén a két-két szemközti oldal összegének szorzata milyen esetben lesz maximális? Határozzuk meg ezt a maximális értéket. (*16 pont*)