

## I. kategória: Szakközépiskolák

### Első (iskolai) forduló

1. Az  $ABCD$  trapéz párhuzamos oldalai  $AB$  és  $CD$ . Az  $AB$  alap felezőpontja  $M$ , a  $CD$  alap felezőpontja  $N$ , az  $AD$  szár felezőpontja  $P$ . Határozza meg az  $AMCP$  és a  $BNDP$  négyszögek területének arányát!

2. Oldja meg a

$$[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$$

egyenletet, ha  $x$  valós szám!

(Az  $r$  valós szám esetén  $[r]$  – az  $r$  egész része – jelöli azt az egész számot, amelyre  $r - 1 < [r] \leq r$ . Az  $r$  valós szám esetén  $\{r\}$  – az  $r$  törtrésze – jelöli azt a számot, amelyre  $\{r\} = r - [r]$ .)

3. A valós számok halmazán értelmezett  $f(x)$  függvényről tudjuk, hogy

$$f(x) = a \cdot |x + 1| + b \cdot |x - 1| + c \cdot |x - 3|,$$

továbbá

$$f(-2) = 8; \quad f(2) = -2 \quad \text{és} \quad f(5) = 6.$$

a) Határozza meg az  $f(x)$  függvényt!

b) Vázolja a függvény grafikonját a  $[-2; 5]$  intervallumban!

c) Adja meg a függvény legkisebb értékét, és azt, hogy ezt a legkisebb értéket a függvény hol veszi fel!

4. Felveszünk egy 2003 mm hosszúságú  $AB$  szakaszt, majd felosztjuk 2003 egyenlő részre. Ezután az  $AB$  szakaszra az  $A$  pontjában 8 mm hosszúságú merőleges szakaszt állítunk. Ennek  $C$  végpontját összekötjük  $B$ -vel és az  $AB$  szakasz összes osztópontjával. Az így keletkezett összes háromszög közül melyek azok, amelyekben minden oldal hossza milliméterben mérve egész szám?

5. Határozza meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre teljesül az, hogy ha egymás után leírjuk  $n^3$  és  $n^4$  tízes számrendszerbeli alakját, akkor a kapott tízjegyű számban mind a tíz számjegy pontosan egyszer fordul elő!

6. Egy előadáson 50 személy vett részt. Tudjuk, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik három személy mindegyikével találkozott már korábban. Bizonyítsa be, hogy bármely négy résztvevő között van olyan személy, aki korábban már mindegyik résztvevővel találkozott!

### Második forduló

1. Melyek azok az  $n$  egész számok, amelyekre a

$$K = \frac{(n+1)^2}{n+20}$$

kifejezés értéke is egész szám?

2. Az  $ABCD$  téglalap  $AB$  oldala, mint átmérő fölé írt félkör a  $CD$  oldalt az  $E$  és az  $F$  pontokban metszi. A félkörhöz az  $F$  pontban érintőt húzva, a kapott egyenes az  $AD$  oldalt a  $D$ -hez legközelebbi hatodolópontjában metszi.

Adja meg az  $\frac{AB}{BC}$  arány pontos értékét!

3. Egy  $4 \times 4$ -es táblázat minden sorába és minden oszlopába egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjait kell beírni, de előre be vannak írva a következő számok:

2			
			673
	850		
		1638	

Milyen szám kerül a jobb alsó sarokba?

<sup>1</sup> A II. és III. kategóriák feladatait novemberi számunkban közöltük.

4. Egy háromszög oldalainak hossza  $a, b, c$ ; szögei rendre  $\alpha, \beta, \gamma$ . Tudjuk, hogy  $\alpha = 40^\circ$ , valamint a háromszög  $T$  területére fennáll a következő összefüggés:

$$2 \cdot T = a \cdot b \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Mekkora a háromszög másik két szöge?

5. Bizonyítsa be, hogy minden 1-nél nagyobb, tetszőleges  $x, y, z$  valós számra teljesül, hogy:

$$\log_{xy} \sqrt{x \cdot y \cdot z^2} \cdot \log_{xz} \sqrt{x \cdot y^2 \cdot z} \cdot \log_{yz} \sqrt{x^2 \cdot y \cdot z} \geq 1.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

### Harmadik (dőntő) forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha  $x, y, z$  valós számok!

$$\begin{aligned}x + yz &= 1, \\y + zx &= 1, \\z + xy &= 1.\end{aligned}$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha  $x, y, z$  pozitív hegyesszögek, akkor teljesül a

$$\cos(x - y) \cdot \cos(y - z) \cdot \cos(z - x) \geq \sin 2x \cdot \sin 2y \cdot \sin 2z$$

egyenlőtlenség!

Mikor áll fenn egyenlőség?

3. Jelölje az  $ABC$  szabályos háromszögbe írt kört  $k$ , a  $k$  kör egy tetszőleges pontját (a kör és az oldalak érintési pontjai kivételével) pedig  $M$ . Az  $M$  ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan húzott egyenesek az  $ABC$  háromszöget három háromszögre és három paralelogrammára osztják.

Bizonyítsa be, hogy a kapott háromszögek területének összege megegyezik a keletkezett paralelogrammák területének összegével!