KEZDŐK
Első forduló

Mindhárom kategória

1. Oldja meg az $x - \operatorname{sgn}(x+1) = 1 - \sqrt{2}$ egyenletet, ahol $\operatorname{sgn}(x)$ az előjelfüggvény, amelynek értéke:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

2. A $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{2004 \text{ db } 9}$ összegben hány 1-es számjegy fordul elő?

3. Az $ABCD$ rombuszt, ahol $DAB\sphericalangle = 60^\circ$, az átlók metszéspontja körül elforgatjuk 90°-kal. Így kapjuk az $A'B'C'D'$ rombuszt. Határozza meg a két rombusz közös részének területét, ha a rombusz oldalhossza a egység!

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b és c nem negatív egész számok:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & a + 2\cdot b + b^2 + c = 19, \\ \text{II.} & a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c = 15. \end{array}$$

5. Az ABC háromszögben az A csúcsból induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban, a C-ből induló szögfelező a szemközti oldalt az E pontban metszi. A szögfelezők metszéspontját jelöljük M-mel! Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha $AB = AD$ és $BM = BE$?

Második (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások és heti legfeljebb 3 órában kötelezően matematikát tanuló gimnáziumi tanulók

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$[x] = 1 + \{x^2 - 5\},$$

ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb és $\{x\} = x - [x]$.

2. Legyen e, f és g három különböző párhuzamos egyenes egy síkban, P az e egyenes egy pontja. Vegyük fel azt a P-n átmenő két egyenest a síkban, amelyek e-vel 60°-os szöget zárnak be. Ezek egyike az f egyenest A-ban, g-t A'-ben metszi, a másik az f egyenest B'-ben és g-t B-ben metszi. Igazolja, hogy található az e egyenesen olyan C pont, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

3. Melyik nagyobb: 2^{2004} vagy 2004^{182}?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában kötelezően matematikát nem speciális matematika tanterv szerint tanuló gimnáziumi tanulók

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x = 14\cdot\{x\} + 3,$$

ahol $\{x\} = x - [x]$ és $[x]$ az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb.

2. Mely x, y és z egész számokra igaz az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2004}$$

egyenlőség?

3. Legyen az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet BC, illetve CD oldalának egy-egy belső pontja P, illetve Q! Bizonyítsa be, hogy ha az APQ háromszög tompaszögű, akkor $PQ < 5\cdot\sqrt{2} - 6$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Melyik nagyobb a következő számok közül: $M_{2004} = 2^{4^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^4}}}}}}$ vagy $N_{2004} = 4^{2^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^2}}}}}}$? Mindkét emeletes hatványban 2004 darab szám szerepel, váltakozva kettesek és négyesek.

2. Tekintsük a következő számot: $444\dots4449$, ahol az utolsó számjegy kivételével minden más jegy négyes, számjegyeinek száma pedig 2004-nek többszöröse. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám nem egy prímszám négyzete!

3. Legyen az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet BC, illetve CD oldalának egy-egy belső pontja P, illetve Q. Mekkora lehet a PQ szakasz hossza, ha tudjuk, hogy az APQ háromszög tompaszögű?

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolások és heti legfeljebb 3 órában kötelezően matematikát tanuló gimnáziumi tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Az első n pozitív egész szám összege egy olyan háromjegyű szám, amelynek minden jegye egyenlő. Mekkora n értéke?

2. Mekkora az oldalak aránya abban az egyenlő szárú háromszögben, amelyben az alap egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is?

3. Hány darab pozitív egészekből álló $(k;n)$ számpárra igazak a

$$\sqrt{n+k}+\sqrt{n-k}>k \quad \text{és} \quad k^2+n^2<100$$

egyenlőtlenségek?

4. Az $x^2+x+p=0$ egyenlet két különböző valós gyöke x_1 és x_2, ahol p pozitív valós paraméter. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^4+x_2^4}$ nagyobb (-2)-nél, de kisebb (-1)-nél.

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor ez a háromszög hasonló az eredetihez.

2. Egy 4000 cm^2 területű téglalapban adott 2004 darab pont. Mutassuk meg, hogy ezek között van három olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe 2 cm^2-nél kisebb.

3. Egy derékszögű háromszög területe 2004 területegység. Lehet-e a háromszög mindhárom oldalának hossza egész szám értékű?

4. Oldjuk meg a $\sqrt{2p-x}-\sqrt{x-p}=p-2$ egyenletet, ahol a p paraméter értéke egész szám.

Harmadik (döntő) forduló

1. Adott egy derékszögű trapéz a hosszú alapja, amelyen hegyesszög is van. A másik alapnak és a trapéz magasságának összege b, ahol $a<b$. Bizonyítsuk be, hogy ha a trapéz területe maximális, akkor a hegyesszögre illeszkedő szár hossza nagyobb $a\cdot\sqrt{2}$-nél.

2. Az x valós számra teljesül, hogy $x^4+ax^3+(2-12a^2)x^2+ax+1=0$, ahol az a paraméter értéke egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3}$$

hányados értéke egész szám.

3. Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege, semelyik kettő különbsége és semelyik kettő szorzata se legyen osztható 2004-gyel?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában kötelezően matematikát nem speciális matematika tanterv szerint tanuló gimnáziumi tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy
a) $2003^{2004} + 2004^{2003}$ nem prímszám,
b) $2003^{2004} - 2004^{2003}$ nem négyzetszám.

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög kerületét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is. Milyen arányban osztja a háromszög alaphoz tartozó magassága a kerületet felező egyenes háromszögbe eső szakaszát?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek két olyan valós gyöke van, amelyek közül az egyik a $[0;1]$ intervallum belsejébe esik, a másik pedig az intervallumon kívül van (ahol p és q valós paraméter), akkor az

$$(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$$

egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

4. Legyen a, b, c és d négy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\big[(a;c);(b;d)\big] \le \big([a;b];[c;d]\big),$$

ahol $(x;y)$ – a szokásos módon – az x és y egészek legnagyobb közös osztóját, $[x;y]$ pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

5. Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!

Második forduló

1. Az ABC derékszögű háromszög átfogója 6 egység hosszú. Az AC befogó C csúcshoz közelebbi harmadolópontja D, a BC befogó B csúcshoz közelebbi harmadolópontja pedig E. Ha az A, B, E, D pontok egy körön vannak, akkor mekkora a négyszög köré írható kör sugara?

2. Oldjuk meg a $\sqrt{2p - x} - \sqrt{x - p} = p - 2$ egyenletet, ahol a p paraméter értéke egész szám.

3. Az ABC háromszög A csúcsánál $60°$-os szög van. Legyen BCE és ACF a BC, illetve AC oldal fölé kifelé rajzolt szabályos háromszög. Legyen továbbá D az AC oldalnak az a pontja, amelyre az ABD háromszög szabályos. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $CEDF$ négyszög paralelogramma.

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{array}{llll} x^2 & + y^2 & + z^2 & = u^2 + 1 \\ xy & + yz & + zx & = u \\ x & + y & & = u - 1 \end{array}\right\}$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy valós számokból álló sorozatot a következő rekurzióval adunk meg:
a) $x_1 = 2$;
b) $x_{n+1} = n + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, ha az $n \ge 1$.
Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei között nincsen négyzetszám!

2. Az O középpontú AB átmérőjű r sugarú körhöz az OA félegyenes A ponton túli meghosszabbításának tetszőleges C pontjából érintőt húzunk a körhöz. Legyen az A pontból az érintőre állított merőleges talppontja a P pont. Határozzuk meg a C pontot úgy, hogy a PB távolság a lehető legnagyobb legyen!

3. Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege, semelyik kettő különbsége és semelyik kettő szorzata se legyen osztható 2004-gyel?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Mely p és q pozitív prímszámra és n egész számra teljesül az $n^2 = p^2 + q^2 + p^2q^2$ összefüggés?

2. Az ABC háromszög síkjának tetszőleges P pontjából a háromszög magasságvonalaira állított merőlegesek talppontja X, Y és Z. Bizonyítsuk be, hogy az XYZ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

3. Az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nemnegatív számok összege 5. Határozzuk meg az

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$$

összeg maximumát!

4. Az 1-es és 5-ös számjegyek felhasználásával hány különböző 15-tel osztható 15-jegyű pozitív egész szám állítható elő, ha két 5-ös nem lehet szomszédos?

Második (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y egész számokra teljesülnek a

$$(1) \qquad 13 \mid x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \qquad \text{és} \qquad (2) \qquad 13 \mid x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y$$

oszthatóságok, akkor teljesül a következő is:

$$(3) \qquad 13 \mid xy - 12x + 15y.$$

2. Az O középpontú AB átmérőjű r sugarú körhöz az OA félegyenes A ponton túli meghosszabbításának tetszőleges C pontjából érintőt húzunk a körhöz. Legyen az A pontból az érintőre állított merőleges talppontja a P pont. Határozzuk meg a C pontot úgy, hogy a PB távolság a lehető legnagyobb legyen!

3. Egy 8×8-as sakktáblára 8 bástyát helyeztünk el úgy, hogy semelyik kettő nem üti egymást. Bizonyítsuk be, hogy páros sok bástya áll fekete mezőn!