Legyen egy nagy kör sugara r. Nyilvánvaló, hogy a kis körök középpontjai közül 6 egy szabályos hatszög csúcsait adja, a hetedik pedig e hatszög középpontja. Az érintkezések és az egész ábra szimmetriái alapján a 6 nagy kör középpontjai is egy szabályos hatszög csúcsait adják és ezek az ábra C centrumától $2r$ távolságra vannak.

Tekintsük azt a háromszöget, amelyet a jobb felső nagy kör O_1, a jobb oldali kis kör O középpontja, valamint C alkot, ebben $CO_1 = 2r$, $CO = 2$, $O_1O = r + 1$ és $O_1CO\sphericalangle = 30°$, ennélfogva a cosinustétel alapján, majd 0-ra redukálva

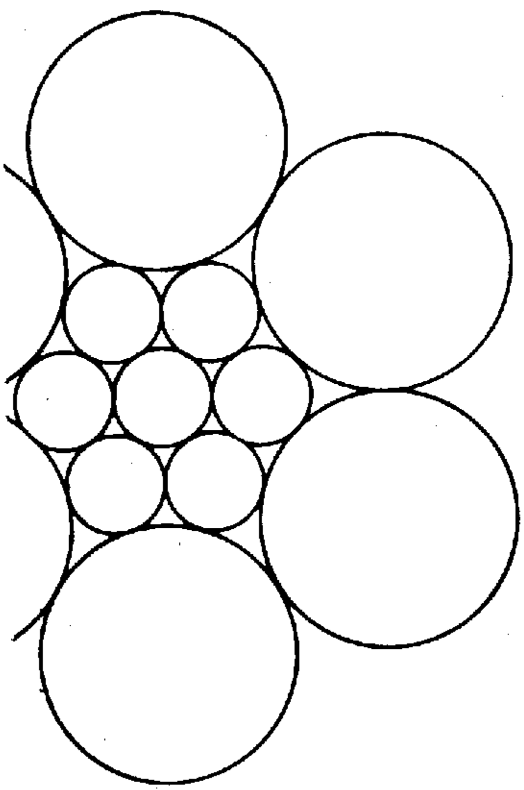
$$(r+1)^2 = 4r^2 + 4 - 4\sqrt{3}r,$$
$$r^2 - \frac{2}{3}(1 + 2\sqrt{3})r + 1 = 0.$$

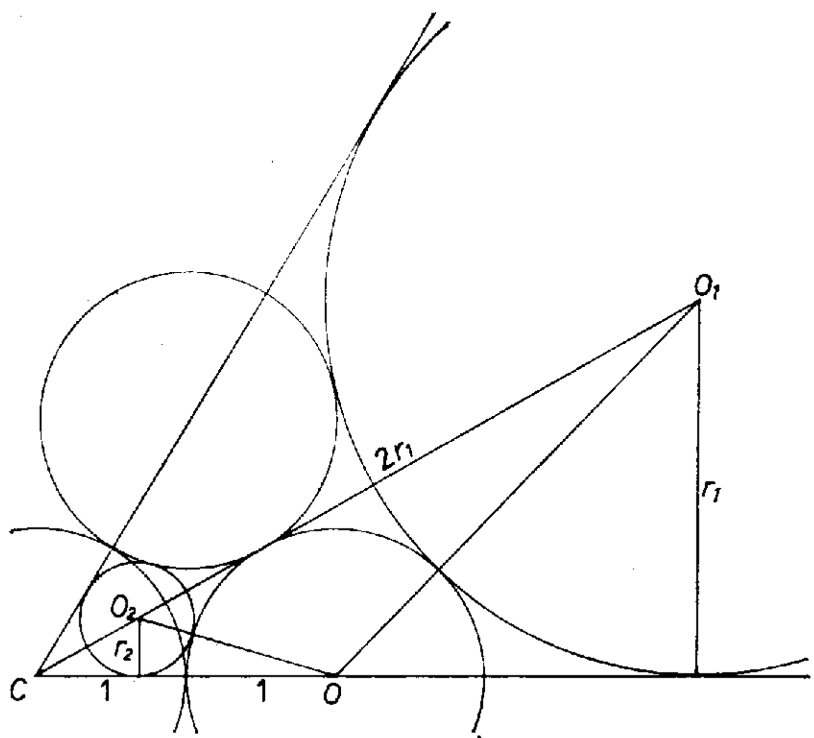
Valóban másodfokú egyenletet kaptunk, anélkül, hogy erre törekedtünk volna. A leírt fölismerések alapján ugyanis csak így juthattunk közelebb r-hez. Most viszont – mivel az egyenlet diszkriminánsa $16(1 + \sqrt{3})/9 > 0$, így a gyökök valósak, másrészt mindkettő pozitív, hiszen összegük is, szorzatuk is pozitív–, *feladatunk előírása nélkül is* meg kellene vizsgálnunk, melyik gyök felel meg, ha egyáltalán megfelel valamelyik.

Szövegünk, az $r > 1$ „kiegészítő" követelményt adja, de ezt nem használtuk fel a felállításban, nem is használhattuk volna! Az

$$r_1 = \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{1+\sqrt{3}}) = 2{,}59$$

gyök ennek eleget tesz, és a mérés szerint a nagy és kis sugarak arányára ez megfelelő érték; elfogadjuk.





Egyenletünk együtthatóiból a két gyök szorzatára $r_1r_2 = 1$, tehát $r_1 > 1$ alapján $0 < r_2 = \dfrac{1}{r_1} < 1$. Ennek a következő jelentést tulajdoníthatjuk. Az r_1 sugarú körök együttese, „koszorúja" a C középpontú, $30°$ szögű, $\dfrac{1}{r_1}$ arányszámú forgatva zsugorítással átmegy a kisebb körök koszorújába, ugyanez a transzformáció a kis koszorút egy még kisebb koszorúba viszi át, és r_2 éppen ezt az új koszorút alkotó körök sugarát adja meg.

Valóban, visszatekintve az egyenlet felállítására, a következőket mondhatjuk. Azzal, hogy kis köreink sugarát ismertnek tekintjük, ezek mintegy kiindulási, „régi" köröknek nevezhetők, és hozzájuk keressük a „másik méretű", az „új" körök sugarát. Egy „új" kör

egyszerűsített leírása: a C centrumból félegyeneseket húzunk két szomszédos régi kör középpontján át, és az új körnek ezt a két félegyenest is és a vett két régi kört is érintenie kell (a szimmetria miatt ez nem 4 követelmény!). Ez „befelé" éppúgy lehetséges, mint ahogyan kifelé. A felhasznált háromszög oldalai a „belső" elképzelés szerint is 2, $2r$ és $(r+1)$. Tehát „nagy" helyett „új" körökről beszélve, r_1 és r_2 egyenjogú megoldások. *Megjegyzések.* 1. A megállapításból látható, hogy az eredeti ábra végtelen mintává fejleszthető tovább: tetszőleges kört felvéve, majd köré 6 ugyanekkora kört rajzolva, ezek köré újabb 6 egymást is érintő kör rajzolható stb.; illetve az eredeti középső kör helyett 6 még kisebb, egymást és a hat kis kört érintő kör rajzolható, ezekbe újabb 6 még kisebb kör stb. A minta mindig befejezhető úgy, hogy középre a 6 legkisebb körrel egyenlő nagyságú, ezeket érintő kört rajzolunk.

2. Tulajdonképpen önmagunknak nehezítjük meg a munkát, ha ilyen „előítéleteket” viszünk be, mint „nagy” kör. *Az ábra zavarni is tud!*