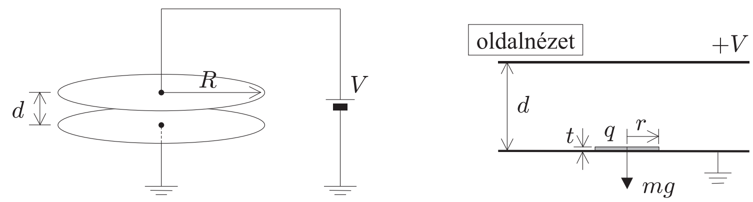
[1]

1. feladat. „Pingpong-ellenállás”

Egy síkkondenzátor két kör alakú, párhuzamos lemezből áll, mindkettő sugara R, a közöttük lévő távolság d, ahol $d \ll R$ (*1.(a). ábra*). A felső lemez egy *állandó* feszültségforráshoz csatlakozik, amelynek potenciálja V, míg az alsó lemez földelt. Az alsó lemez közepére egy vékony, kicsiny, m tömegű korongot helyezünk, melynek sugara r ($\ll R, d$), vastagsága t ($\ll r$), (*1.(b). ábra*).



(a) (b)

1. ábra. (a): Állandó feszültségforráshoz csatlakozó *síkkondenzátor* vázlatos rajza. (b) A párhuzamos *lemezek* oldalnézete a kondenzátorba helyezett kisméretű *koronggal*

Tételezzük fel, hogy a lemezek közötti térrészben vákuum van, amit az ε_0 dielektromos állandó jellemez, továbbá a lemezek és a korong tökéletes vezetőanyagból készültek, illetve mindenféle elektrosztatikus él-effektust elhanyagolhatunk. Az egész áramkör induktivitásától és a relativisztikus hatásoktól szintén eltekinthetünk. A tükörtöltés hatásokat is elhanyagolhatjuk.

(a) (*1,2 pont*) Határozd meg az egymástól d távolságra lévő lemezek között ható F_p elektrosztatikus erőt, mielőtt a korongot a kettő közé helyeztük, amint ezt az *1.(a). ábra* mutatja.

(b) (*0,8 pont*) Az *1.(b). ábrán* lévő kicsiny *korong* q töltése a következő módon adható meg a felső lemez feszültségének függvényében: $q = \chi V$. Határozd meg a χ paramétert r, d és ε_0 függvényében!

(c) (*0,5 pont*) A síkkondenzátor lemezei a $\boldsymbol{g}$ homogén gravitációs térre merőlegesen helyezkednek el. A kezdetben nyugalomban lévő korong megemeléséhez egy bizonyos V_k küszöbérték fölé kell növelnünk az alkalmazott feszültséget. Fejezd ki V_k-t m, g, d és χ segítségével!

(d) (*2,3 pont*) Ha $V > V_k$, a korong föl-le fog mozogni a lemezek között. (Tételezzük fel, hogy a korong *mindenféle billegés nélkül,* kizárólag függőlegesen mozog.) A korong és a lemezek közötti ütközések részben rugalmatlanok, amit az η ütközési számmal jellemezhetünk: $\eta \equiv \dfrac{v_{\text{előtt}}}{v_{\text{után}}}$, ahol $v_{\text{előtt}}$ és $v_{\text{után}}$ rendre a korong sebessége közvetlenül az ütközés előtt és után. A lemezek végig rögzítettek, nem mozdulnak el. Hosszú idő után a korong „állandósult” mozgást fog végezni, a korong viselkedése ismétlődő mozgáshoz tart, melyben a korong v_s sebességét *közvetlenül* az alsó lemezzel történő ütközés után a következő módon fejezhetjük ki a V feszültséggel:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}.$$

Fejezd ki az α és β együtthatókat m, g, χ, d és η felhasználásával! Tételezd fel, hogy az ütközésekkor a korong teljes felülete egyenletesen és egyszerre érinti a lemezeket, és a teljes töltéscsere minden ütközéskor pillanatszerűen történik.

(e) (*2,2 pont*) Az állandósult állapot elérése után a kondenzátor lemezein keresztülfolyó áram I időátlagát így közelíthetjük: $I = \gamma V^2$, ha teljesül a $qV \gg mgd$ feltétel. Fejezd ki a γ együtthatót m, χ, d és η segítségével!

(f) (*3 pont*) Ha az alkalmazott V feszültséget (rendkívül lassan) csökkentjük, akkor elérünk egy olyan V_c kritikus feszültséget, amely alatt az áramkörben hirtelen megszűnik az áram. Határozd meg V_c értékét, és a hozzá tartozó I_c áramot m, g, χ, d és η segítségével! Készíts vázlatos grafikont (melyben összehasonlítod V_c értékét a (c) alkérdésben tárgyalt V_k felemelkedési küszöbértékkel) az áram–feszültség karakterisztikáról, vagyis az I–V függvényről, miközben V először nulláról nagyjából $3V_k$-ra növekszik, majd újra nullára csökken.

2. feladat. Felemelkedő ballon

Egy héliummal töltött gumiballon a levegőben magasra emelkedik, olyan régiókba, ahol a nyomás és a hőmérséklet a magasság növekedésével csökken. A következő kérdések tanulmányozásánál tételezzük fel, hogy a ballon a terheléstől függetlenül minden esetben gömbölyű marad, és hanyagoljuk el a terhelés térfogatát. Tegyük fel azt is, hogy a ballonban lévő héliumgáz hőmérséklete mindig azonos a környező levegő hőmérsékletével, és minden gázt kezeljünk ideális gázként. Az univerzális gázállandó $R = 8{,}31$ J/mol $\cdot$ K, és a hélium, illetve a levegő moláris tömege rendre $M_{\mathrm{H}} = 4{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, illetve $M_{\mathrm{A}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. A nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8$ m/s^2.

A rész: (a) (*1,5 pont*) A környező levegő nyomása legyen P, hőmérséklete pedig T. A ballon „felületi feszültségének” következtében a ballon belsejében a nyomás nagyobb a külső nyomásnál. A ballon n mol héliumgázt tartalmaz, és a belsejében a nyomás $P + \Delta P$. Határozd meg a ballonra ható felhajtóerőt P és ΔP függvényében!

---

[1] A részpontszámokat azok kedvéért közöljük, akik – későbbi versenyekre készülve – az olimpiához hasonló feltételek mellett önállóan akarják megoldani a feladatokat. A „hivatalos” megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.

A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

(b) (*2 pont*) Egy szép nyári napon Koreában a levegő T hőmérséklete a tengerszint feletti z magasság függvényében a $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ függvény szerint változott a $0 < z < 15$ km tartományban, ahol $z_0 = 49$ km és $T_0 = 303$ K. A tengerszinten a nyomás, illetve a sűrűség értéke $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, illetve $\varrho_0 = 1{,}16$ kg/m^3 volt. Ebben a magasság tartományban a nyomás a

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^{\eta}. \tag{2.1}$$

formulával adható meg. Fejezd ki az η kitevőt a z_0, ϱ_0, P_0 és g paraméterekkel, és határozd meg numerikus értékét *két értékes számjegy* pontossággal. A nehézségi gyorsulást tekintsd a magasságtól független konstansnak.

B rész: Ha egy gömb alakú, nyújtatlan állapotban r_0 sugarú gumiballont r ($> r_0$) sugarúra fújunk fel, a gumi megnyúlása miatt a ballon felülete extra rugalmas energiára tesz szert. Egy egyszerű elmélet szerint állandó T hőmérsékleten ennek a rugalmas energiának az értéke

$$U = 4\pi r_0^2 \kappa RT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3\right), \tag{2.2}$$

ahol a $\lambda \equiv r/r_0$ (≥ 1) számértéket lineáris méretnövekedési aránynak nevezzük, a κ paraméter pedig egy mol/m^2 dimenziójú állandó.

(c) (*2 pont*) Fejezd ki ΔP-t a (2.2) egyenletben szereplő paraméterek függvényében, és ábrázold vázlatosan a ΔP nyomáskülönbséget a $\lambda = r/r_0$ mennyiség függvényében.

(d) (*1,5 pont*) A κ konstans meghatározható a ballon felfújásához szükséges gáz mennyiségéből. A feszítetlen falú ($\lambda = 1$) ballon $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson $n_0 = 12{,}5$ mol héliumot tartalmaz. Ugyanezen a T_0 hőmérsékleten és P_0 nyomáson a $\lambda = 1{,}5$ méretűre felfújt ballon összesen $n = 3{,}6 \cdot n_0 = 45$ mol héliumot tartalmaz. Fejezd ki n, n_0 és λ segítségével az $a = \kappa/\kappa_0$ képlettel definiált úgynevezett „ballonparamétert”, ahol $\kappa_0 \equiv \dfrac{r_0 P_0}{4RT_0}$, valamint határozd meg a értékét két értékes számjegy pontossággal.

C rész: A ballont tengerszinten a (d) pontban leírt módon készítjük elő (azaz $n = 3{,}6 \cdot n_0 = 45$ mol hélium gázzal $\lambda = 1{,}5$ méretűre fújjuk fel $T_0 = 303$ K hőmérsékleten és $P_0 = 1$ atm $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa nyomáson). A szerkezet teljes tömege (figyelembe véve a gumiballont, a bezárt gázt és minden egyéb terhet) $M_T = 1{,}12$ kg. Ekkor a tengerszintről elengedjük a ballont.

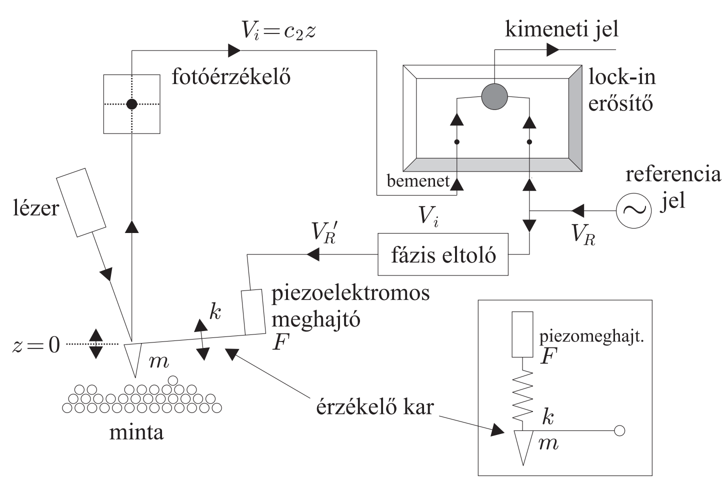
(e) (*3 pont*) Tegyük fel, hogy a ballon z_f magasságig emelkedik, és ott megáll. Ezen a szinten a felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel. Határozd meg z_f értékét, valamint ebben a magasságban a λ_f paramétert (lineáris méretnövekedési arányt). Válaszodat két értékes jegy pontossággal add meg. A ballon nem sodródik oldalirányban, és nem szökik el belőle gáz.

3. feladat. Atomi erő mikroszkóp

Az atomi erő mikroszkóp (Atomic probe microscope, APM) a nano-tudomány igen hatékony eszköze. Az APM érzékelő karjának elmozdulását egy fotóérzékelő detektálja, az érzékelő karról visszavert lézersugár segítségével, ahogyan a *2. ábrán* látható. Az érzékelő kar csak függőleges irányban képes mozogni, és a kar z elmozdulása az idő (t) függvényében a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F, \tag{3.1}$$

ahol m a kar tömege, $k = m\omega_0^2$ az érzékelő kart jellemző rugóállandó, b egy kicsiny csillapítási állandó, melyre teljesül, hogy $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, és végül F a piezoelektromos meghajtó által keltett külső gerjesztő erő.



2. ábra. Az atomi erő mikroszkóp (APM) vázlatos rajza. Az ábra jobb alsó sarkában látható kinagyított rész a piezoelektromos meghajtó és az érzékelő kar közti csatolás egyszerűsített mechanikai modelljét mutatja

A rész

(*a*) (*1,5 pont*) Ha a gerjesztő erő $F = F_0 \sin \omega t$ alakú, akkor a (3.1) egyenlet $z(t)$ megoldása $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ alakban írható, ahol $A > 0$ és $0 \le \phi \le \pi$. Fejezd ki az A amplitúdót valamint a $\mathrm{tg}\,\phi$ mennyiséget az F_0, m, ω, ω_0 és b paraméter függvényében! Határozd meg az amplitúdót és a ϕ fázist az $\omega = \omega_0$ rezonanciafrekvencián!

(*b*) (*1 pont*) A *2. ábrán* szereplő lock-in erősítőben létrejön a bemeneti jelnek és a $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ úgynevezett lock-in referencia jelnek a szorzata, és az erősítő kimenetén a szorzatnak *csak* az egyenáramú (DC) komponense jelenik meg. Tegyük föl, hogy a bemeneti jel $V_i = V_{i_0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ alakú. Az itt szereplő V_{R_0}, V_{i_0}, és ϕ_i mennyiségek mindegyike adott pozitív állandó. Határozd meg, hogy milyen ω (> 0) frekvencia mellett kapunk nem zérus kimenő jelet! Add meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát ezen a frekvencián!

(*c*) (*1,5 pont*) A „fázistoló” egységen átjutó, eredetileg $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ alakú lock-in referencia jel alakját a fázistoló egység után a $V_R' = V_{R_0} \sin(\omega t + \pi/2)$ formula írja le. A V_R' feszültség hatására a piezoelektromos meghajtó az érzékelő kart $F = c_1 V_R'$ erővel gerjeszti. Ezután a fotoérzékelő az érzékelő kar z elmozdulását $V_i = c_2 z$ alakú feszültségjellé alakítja. A formulákban szereplő c_1 és c_2 mennyiségek állandók. Határozd meg a nem zérus, *egyenáramú (DC) kimenő jel* nagyságát leíró formulát az $\omega = \omega_0$ frekvencián!

(*d*) (*2 pont*) Az érzékelő kar tömegének kicsiny Δm megváltozása $\Delta\omega_0$-lal eltolja a rezonanciafrekvenciát. Ennek következtében az eredeti, rezonanciafrekvenciához tartozó ϕ fázis is $\Delta\phi$-vel eltolódik. Határozd meg azt a Δm tömeg változást, melynek hatására $\Delta\phi = \pi/1800$ nagyságú fáziseltolódás jön létre! Tipikusan ilyen nagyságú a fázistolás-mérések pontossága. Az érzékelő kart jellemző fizikai paraméterek értéke a következő: $m = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ kg, $k = 1{,}0$ N/m és $(b/m) = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$. Használd az $|x| \ll 1$ esetén érvényes $(1+x)^a \approx 1 + ax$ és $\mathrm{tg}(\pi/2 + x) \approx -1/x$ közelítő formulákat!

B rész

Mostantól kezdve azt az esetet vizsgáljuk, amikor az **A** részben tárgyalt gerjesztő erőn kívül még az *2. ábrán* látható minta is hat valamilyen erővel az érzékelő karra.

(*e*) (*1,5 pont*) Annak ismeretében, hogy a minta által kifejtett $f(h)$ erő csak a minta felszíne és az érzékelő kar közti h távolságtól függ, meghatározható az érzékelő kar egyensúlyi helyzetének új h_0 értéke. A $h = h_0$ érték közelében az erő az $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ alakban írható fel, ahol c_3 állandó, nem függ h-tól. Fejezd ki az új ω_0' rezonanciafrekvenciát ω_0, m és c_3 segítségével!

(*f*) (*2,5 pont*) A mintát a mikroszkópban vízszintesen mozgatva pásztázzuk a minta felszínét. Az érzékelő kar tűje, melynek töltése $Q = 6e$, egy $q = e$ töltésű, a felszín alatt bizonyos mélységben csapdába került (térben lokalizált) elektron közelébe jut. A csapdázott elektron környékén pásztázva a felszínt, a rezonanciafrekvencia maximálisan észlelhető eltolódása $\Delta\omega_0$ $(= \omega_0' - \omega_0)$, ami jóval kisebb, mint ω_0. Fejezd ki a csapdázott elektron és az érzékelő kar közötti d_0 távolságot maximális frekvencia eltolódás esetén az m, q, Q, ω_0, $\Delta\omega_0$ mennyiségek és a k_e Coulomb állandó segítségével! Határozd meg d_0 számértékét nm-ben ($1\ \mathrm{nm} = 1 \cdot 10^{-9}$ m) $\Delta\omega_0 = 20\ \mathrm{s}^{-1}$ frekvencia eltolódás mellett!

Az érzékelő kar fizikai paraméterei: $m = 1{,}0 \cdot 10^{-12}$ kg és $k = 1{,}0$ N/m. Az érzékelő kar tűjében, valamint a minta felületén tekintsünk el a polarizációs effektusoktól. Fizikai állandók: $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ és $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.