– A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

– A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

– A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen,* hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor az utolsó feladatra nem kap pontot!

□

– A feladatok megoldásához zsebszámológépet és négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

– A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!

– Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetőek legyenek!

– A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania; elég csak a tétel megnevezését említeni, de alkalmazhatóságát röviden indokolni kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában alkalmazhatóságát indokolja.

– A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

– A feladatok megoldását tollal készítse! Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!

– Az egyes feladatokra az ott feltüntetett pontszámnál több nem kapható.

– Ha a megadott válasz hibás elemet vagy elemeket tartalmaz, akkor maximális pontszám nem adható.

I. rész

1. Adja meg az alábbi egyenlet $[2;5]$ intervallumba eső megoldásait!

$$4^{x+1,5} - 14 \cdot 2^{x+2} = -96. \qquad (\textit{12 pont})$$

2. Egy golyó beszorult egy deszkalapba vágott, kör alakúnak tekinthető lyukba. Szükség lenne a lyuk átmérőjének méretére, de ezt közvetlenül nem tudjuk megmérni. Mérhető azonban a golyó átmérője, amely 56 mm, és az, hogy a golyó 4,8 cm magasan emelkedik ki a deszkalap fölé. Adja meg a lyuk átmérőjét! A számításhoz készítsen ábrát! (*12 pont*)

3. Határozza meg a grafikonjuk egyenletével megadott, a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvények értékkészletét! Vizsgálja e függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából, rajzolja meg grafikonjukat derékszögű koordinátarendszerben!

a) $y = x \cdot |x|$, (*6 pont*)
b) $y = (\sin x + \cos x)^2$. (*8 pont*)

4. Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, németet és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14-en tanulnak, németül 15-en, franciául pedig 11-en. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet? (*13 pont*)

II. rész

Az 5.–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. Egy trópusi lián hajtása egyre lassabban növekszik, ahogy a növény egyre hosszabb lesz. A kicsírázó magból a növény az első hónapban 100 cm-re nő, és minden további hónapban megközelítőleg az előző havi növekedésének a 4/5-ével lesz hosszabb. (A következő kérdésekre adott válaszait indokolja!)

a) Mennyit fog nőni a 21. hónapban? (*5 pont*)

b) Hány hónap növekedés után lesz 400 cm-nél hosszabb? (*7 pont*)

c) Megnőhet-e 600 cm hosszúságúra? (*4 pont*)

6. Egy városban felmérést készítettek családokról, akik közül éppen százat kérdeztek meg. A családban élő fiú, illetve leánygyermekek száma szerint az alábbi táblázat készült:

Leányok száma → Fiúk száma ↓	0	1	2	3	4
0		11	4	3	2
1	10	15	13	6	1
2	7	9	7	5	0
3	3	2	1	1	0

Tehát például 2 leány és 3 fiú éppen 1 családban van.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot, amelyben a száz családot a különböző gyermekszám szerint kell csoportosítani!

Gyermekszám	1	2	3	4	5	6	7
Családok száma							

(*3 pont*)

b) Számítsa ki, hogy átlagosan hány gyermek van egy családban. Adja meg a mediánt és a móduszt is! Válaszát indokolja! (*6 pont*)

c) Válasszon ki egymás után véletlenszerűen két családot a százból! Mennyi az esélye, hogy mindkét családban legfeljebb 4 gyermek van? (*7 pont*)

7. *a*) Egy ABC háromszögbe egy olyan maximális területű négyzetet írunk, amelynek csúcsai a háromszög oldalain vannak és egyik oldala párhuzamos a háromszög AC oldalával. Az AC oldal hossza 2 egység, a $CAB\sphericalangle = 30°$, az $ACB\sphericalangle = 45°$. Mekkora a négyzet oldala? (*10 pont*)

b) Egy derékszögű koordinátarendszerben az *a*) részben szereplő ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(2;2)$ és $C(4;2)$. Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit! (*6 pont*)

8. a) Bontsa fel az $n^{12}-n^8-n^4+1$ polinomot a lehető legalacsonyabb fokszámú polinomok szorzatára! (*5 pont*)

b) Bizonyítsa be, hogy $512 \mid n^{12}-n^8-n^4+1$, ha n páratlan természetes szám! (*4 pont*)

c) 512 pontot helyezünk el egy olyan téglalapban, amelynek egyik oldala 7, másik oldala 73 egység. Bizonyítsa be, hogy az így elhelyezett pontok között mindig találhatunk legalább kettőt, amelyek távolsága nem nagyobb mint 1,5 egység! (*7 pont*)

9. 1910 júniusában Lisszabon kikötőjéből indult útnak az Arca nevű gőzös. A 120 m hosszú hajó kéményei 24 m magasra emelkedtek a tengerszint fölé. Az óceánt átszelni készülő Arca rakterének tekintélyes részét foglalta el az élelmiszer-, ivóvíz- és italkészlet, valamint az M tonna tömegű tüzelőanyag.

a) Mekkora út megtétele után tűnt el a hajó megfigyelők szeme elől, akik az útját a partról tízszeres nagyítású látcsővel követték? (A Földet 6 378 300 méter sugarú gömbnek tekinthetjük.) (*6 pont*)

b) A gőzhajó M tonna üzemanyaggal indult útnak. Az óránkénti tüzelőanyagfelhasználás (y tonna óránként) a hajó sebességétől (v csomó, azaz tengeri mérföld/óra) a következő képlet szerint függ: $y = 1{,}4 + 0{,}005\,v^2$, ahol a képletben szereplő számok a hajó típusától függő állandók.
Mekkora állandó sebességgel kell mennie a hajónak, hogy M tonna tüzelőanyaggal a lehető legnagyobb utat tegye meg? (*10 pont*)

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható pontszám van, a javító által adott pontszám a mellette levő téglalapba kerül.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

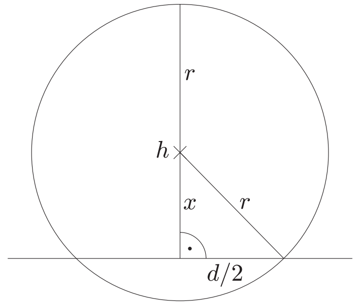
- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább *bonthatók.* Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett.*
- Ha a megoldásban *számolási hiba,* pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Egy feladatra adott megoldások közül csak egy (a magasabb pontszámú) értékelhető.
- A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Ha a pontozási útmutató a feladat ellenőrzéséért pontot ad, akkor az csak abban az esetben adható meg, ha a vizsgázó valamilyen formában írásban rögzíti az ellenőrzés tényét. (Itt minden elvileg helyes módszer elfogadható.)
- A feladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, melynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani, csak a többi feladatot. Ha ezen előírások alapján a javító számára *nem derül ki egyértelműen,* hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a *nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó* feladat lesz.

I. rész

1. feladat. $4^{3/2} \cdot 4^x - 14 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 96 = 0.$ 2 pont
$8 \cdot 4^x - 56 \cdot 2^x + 96 = 0.$
(A hatványozás azonosságainak alkalmazásáért.) 2 pont
$2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 12 = 0.$
(Másodfokú egyenlet rendezett alakjához való eljutásért.) 1 pont
$2^x = 4$ vagy $2^x = 3.$
(A másodfokú egyenlet megoldásáért.) 2 pont
$x_1 = 2.$
(Az egyik gyökért.) 1 pont
$x_2 = \log_2 3 \approx 1{,}585.$
(A másik gyökért (közelítő érték nélkül is).) 1 pont
A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre.
(Az ellenőrzésért, ill. annak megállapításáért, hogy a kapott gyökök valóban megoldások. Ha csak egy gyököt talált meg, de azt ellenőrzi, akkor is jár a pont.) 1 pont
Az x_1 eleme az adott intervallumnak, ez tehát megoldás. 1 pont
Az x_2 nem eleme az intervallumnak. 1 pont

Összesen: 12 pont

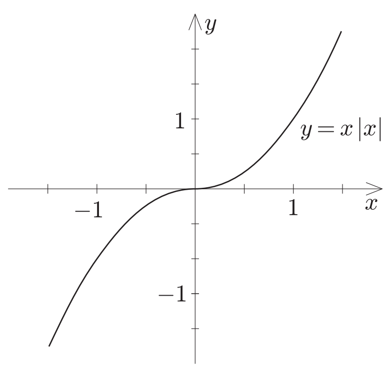
2. feladat.



(A síkmetszet ábráján szerepelnie kell az ismert $(r; h)$ és ismeretlen $(d; x)$ szakaszoknak, a derékszögű háromszögnek.)
3 pont $h = 4{,}8$ cm $= 48$ mm, $D = 2r = 56$ mm.
(Átváltásért.) 1 pont $r = D/2 = 28$.
(A sugár kiszámításáért.) 1 pont $x = h - r = 20$.
(A befogó kiszámításáért.) 2 pont
$(d/2)^2 = r^2 - x^2$.
(Pitagorasz-tétel felírásáért.) 2 pont
$(d/2)^2 = 28^2 - 20^2$.
(Behelyettesítésért.) 1 pont
$d/2 = 19{,}596$. 1 pont
$d = 39{,}19 \approx 39{,}2$.
A lyuk átmérője 39,2 mm.
(Mértékegységgel ellátott eredményért.) 1 pont

Összesen: 12 pont

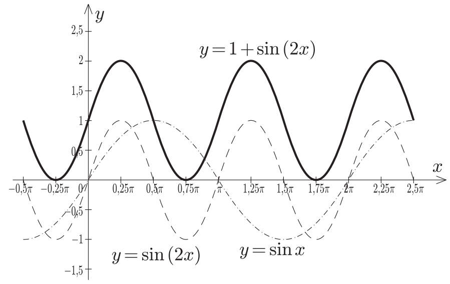
3. feladat. *a)* $y = x \cdot |x| = x^2$, ha $x \geq 0$. 1 pont
$y = x \cdot |x| = -x^2$, ha $x < 0$. 1 pont
A grafikon. 1 pont



(A grafikon megrajzolásáért összesen 3 pont jár, az átalakítás leírása nélkül is.)
Az értékkészlet: $\mathbb{R}$.
(Az értékkészlet helyes megállapításáért.) 1 pont A függvény az értelmezési tartományon szigorúan monoton nő.
(A monotonitás helyes leírásáért.) 1 pont Szélsőértéke nincs.
(A szélsőérték vizsgálatáért.) 1 pont

Összesen: 6 pont

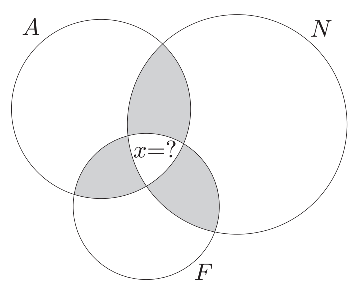
b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$,
$y = \sin 2x + 1$.
(A trigonometrikus átalakításért.) 2 pont
Grafikon.
(A grafikon helyes felrajzolásáért. Akármilyen módon jut a helyes grafikonhoz, összesen 4 pont.)
2 pont



Az értékkészlet: $[0;2]$
(Az értékkészlet helyes megállapításáért.) 1 pont
A függvény szigorúan monoton nő: $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$,
szigorúan monoton csökken: $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right]$.
(A monotonitás helyes leírásáért.) 1 pont
A függvény maximumhelyei: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$,
minimumhelyei: $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.
(A szélsőértékek helyéért.) 1 pont
A minimum értéke 0, a maximumé 2.
(A szélsőértékek értékéért.) 1 pont

Összesen: 8 pont

4. feladat.



1. megoldás: $|A|=14$; $|N|=15$; $|F|=11$;
|pontosan két nyelvet tanulók| $=6$.
(A feladat adatainak helyes elképzeléséért (pl. Venn-diagramon feltüntetett számok).)
5 pont
Ha a mindhárom nyelvet tanuló diákok száma x, akkor:
$|A|+|N|+|F|-$|pontosan két nyelvet tanulók|$-2x=30$.
(A kérdezett számosság meghatározásához alkalmas összefüggés felírásáért (nem feltétlenül egyenlettel).) 5 pont
$14+15+11-6-2x=30$.
(Helyes numerikus egyenlet.) 1 pont
$x=2$,
(Helyes numerikus eredményért.) 1 pont
tehát 2 diák tanulja mindhárom nyelvet.
(Helyes szöveges válaszért.) 1 pont

Összesen: 13 pont

2. megoldás: 30 diák mindegyike részt vesz egy nyelvórán, ez 30 óra. 2 pont
6-an két nyelvet is tanulnak, ez $+6$ óra, azaz eddig 36 nyelvóra (a diákok óráit számolva). 3 pont
Összesen 40 nyelvóra van, hiányzik tehát még 4 óra, 3 pont
ami abból adódik, hogy vannak, akik 3 órán is részt vesznek. 2 pont
Nyilván 2 ember esetén adódik $+4$ óra, ha a mindegyikük még 2–2 órán jelen van. 2 pont
Tehát 2 tanuló tanul 3 nyelvet. 1 pont

Összesen: 13 pont

(*Megjegyzés:* Szisztematikus próbálgatással, kísérletezéssel nyert helyes eredményért, ha azt ellenőrzi is, de nem bizonyítja, hogy más megoldás nem lehetséges, 8 pont adható.)

II. rész

Az alábbi öt feladat (5.–9.) közül a tanulónak tetszés szerint választott *négyet* kellett megoldani és *négyet* kell értékelni!

5. feladat. *a*) A futónövény havi növekedésének hosszúságai mértani sorozatot alkotnak, 1 pont
amelynek első tagja $a_1 = 100$, 1 pont
a hányadosa $q = 4/5 = 0{,}8$. 1 pont
(A mértani sorozat felismeréséért, az a_1 és a q meghatározásáért 3 pont jár.)
A 21. havi növekedés a mértani sorozat 21. tagja:
$a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 100 \cdot 0{,}8^{20} = 1{,}15$. 1 pont
A 21. hónapban 1,15 cm-t fog nőni. 1 pont

Összesen: 5 pont

b) A növekedések összege túl kell, hogy lépje a 400 cm-t. 1 pont
$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$,
$S_n = 100 \cdot \dfrac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} \geq 400$. 1 pont
$\dfrac{1 - 0{,}8^n}{0{,}2} \geq 4$. 1 pont
Rendezve: $0{,}8^n \leq 0{,}2$. 1 pont
$n \geq \log_{0{,}8} 0{,}2$. 1 pont
$n \geq \dfrac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}8} \approx 7{,}21$. 1 pont
Tehát a 8. hónapban éri el a 400 cm-es hosszt. 1 pont
(Az n meghatározásáért 4 pont jár.)

Összesen: 7 pont

c) Az előző ponthoz hasonlóan:
$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \cdot \dfrac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} \geq 600$. 2 pont
Rendezve: $0{,}8^n \leq -0{,}2$. 1 pont
Ez viszont nem lehetséges, azaz a 600 cm-es hosszúságot már nem éri el a növény.
1 pont
(Az ellentmondás felismeréséért 4 pont jár.)

Összesen: 4 pont

6. feladat. *a*)

	1	2	3	4	5	6	7
	21	26	28	17	7	1	0

(Ezt a 3 pontot bontani kell, ha van hibás válasz is. Az adható pontszám: a jó válaszok felének egészrésze.) 3 pont

Összesen: 3 pont

b) Számtani közép:
$\dfrac{1 \cdot 21 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0}{100}$. 1 pont
Értéke: 2,66. 1 pont
Medián: 3, hiszen az 50. és az 51. család is 3 gyermekes a gyermekszám szerinti sorba rendezéskor.
(Indoklás nélkül is elfogadható.) 2 pont
Módusz: 3, mert ez a leggyakoribb érték.
(Indoklás nélkül is elfogadható.) 2 pont

Összesen: 2 pont

c) 92 családban van legfeljebb 4 gyermek. 2 pont

A jó esetben közülük kell kiválasztani kettőt: $\binom{92}{2}$. 1 pont

Az összes esetben 100 családból kell kiválasztani kettőt: $\binom{100}{2}$. 1 pont

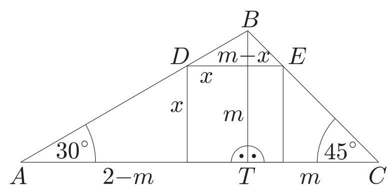
A keresett esély e kettő hányadosa:

$\frac{\binom{92}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{92 \cdot 91}{100 \cdot 99} = 0{,}8457.$ 2 pont

Tehát erre az esély kb. 84,6%. 1 pont

Összesen: 7 pont

7. feladat. a) Rajz.
(A geometriai modell helyes elképzeléséért.)
3 pont



ABT derékszögű háromszögben:

$\operatorname{tg} 30° = \frac{m}{2-m}.$ 1 pont

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m}{2-m}.$ 1 pont

$m = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73.$ 1 pont

(A magasság meghatározásáért 3 pont adható.)

Két hasonló háromszögből (ABC és DBE):

$\frac{m-x}{x} = \frac{m}{AC}.$ 1 pont

$\frac{0{,}73-x}{x} = \frac{0{,}73}{2}.$ 1 pont

$x \approx 0{,}54 \ \left(= 4 - 2\sqrt{3}\right).$ 1 pont

A négyzet oldala 0,54 méter. 1 pont

Összesen: 10 pont

b) Az AB oldalegyenes irányszöge 30°, tehát meredeksége $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1 pont

Az A pont segítségével felírva az egyenes egyenletét:

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$

($y = 0{,}58x + 0{,}85$.) 1 pont

A BC oldalegyenes irányszöge 135°, így meredeksége -1. 1 pont

A C pont segítségével felírva az egyenlete: $y = -x + 6$. 1 pont

A két egyenes metszéspontja adja a B csúcs koordinátáit: $B\left(5-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$,

$B(3{,}27; 2{,}73)$. 2 pont

Összesen: 6 pont

8. feladat. a) $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4-1) - (n^4-1) =$

(kiemelés) 1 pont

$= (n^4-1) \cdot (n^8-1) =$

(szorzattá alakítás) 1 pont

$= (n^4-1) \cdot (n^4-1) \cdot (n^4+1) =$

(egyik tényező szorzattá alakítása) 1 pont

$= \left((n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2+1)\right)^2 \cdot (n^4+1) =$

(másik tényező szorzattá alakítása) 1 pont

$= (n-1)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n^2+1)^2 \cdot \left(n^2+1-\sqrt{2}n\right) \cdot \left(n^2+1+\sqrt{2}n\right).$ 1 pont

Összesen: 5 pont

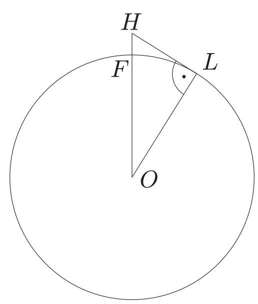
b) $512 = 2^9$.
$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n-1)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n^2+1)^2 \cdot (n^4+1)$.
Mivel n páratlan, minden tényező páros, 1 pont
így a szorzat biztosan osztható 2^7-nel. 1 pont
Az $n-1$ és az $n+1$ szomszédos páros számok, tehát az egyik 4-gyel is osztható. 1 pont
Tehát a szorzat összességében osztható 2^9-nel. 1 pont

Összesen: 4 pont

c) A $7 \cdot 73 = 511$ téglalap felbontható 511 négyzetre. 2 pont
Az 512 pontot csak úgy lehet elhelyezni 511 négyzetben, hogy legalább egy négyzetben van 2 pont. 2 pont
Egy négyzetben két pont között a legnagyobb távolság az átló:
$a \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}414\, a$. 1 pont
Ha $a = 1$, akkor két pont távolsága biztosan kisebb, mint 1,42. 1 pont
Ekkor annak a két pontnak a távolsága, amelyek egy négyzetbe esnek, kisebb mint 1,42, így 1,5-nél is kisebb. 1 pont

Összesen: 7 pont

9. feladat. Rajz.
(A feladat helyes értelmezéséért.)
3 pont



Az eltűnés pillanatában a hajó csúcsát (H) a megfigyelővel összekötő egyenes a földgömb érintője, az érintési pont L.
A Föld középpontját jelöljük O-val.
(Akkor, ha a megfigyelő szeme a tenger szintjén található.)
OLH háromszög derékszögű, melynek egyik befogója r, átfogója pedig $r + 24$.
Az LH befogó Pitagorasz-tétellel kiszámolva:
$LH = \sqrt{(r+24)^2 - r^2} = \sqrt{6\,378\,324^2 - 6\,378\,300^2}$. 1 pont
$LH \approx 17\,497$. 1 pont
(Az LH érték meghatározásáért 2 pont jár.)
Tekintettel arra, hogy a HOL szög igen kicsi, az LH távolság jó közelítéssel megegyezik az LF ívhosszal, a megtett út tehát kb. 17,5 km.
(Ennél pontosabb eredményt nincs értelme adni, hiszen a hullámokat, a légköri viszonyokat, a Föld nem tökéletes gömb voltát nem vettük figyelembe.) 1 pont

Összesen: 6 pont

b) *1. megoldás:* Egy óra alatt elfogy $y = 1{,}4 + 0{,}005\, v^2$ tonna üzemanyag.
t óra alatt: M tonna fogy el, ezért
$t = \dfrac{M}{y} = \dfrac{M}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$. 1 pont
$s = v \cdot t$, ezért a hajó által megtett út:
$s = \dfrac{M \cdot v}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$. 1 pont
Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük. 1 pont
A kifejezést átalakítva: $s = \dfrac{M}{\frac{1{,}4}{v} + 0{,}005\, v}$. 1 pont
A tört értéke akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb, hiszen a számláló konstans. 1 pont

A nevező a középértékek közötti nevezetes egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\frac{1,4}{v}+0,005\,v}{2} \geq \sqrt{\frac{1,4}{v}\cdot 0,005\,v}.$$ 2 pont

Akkor áll fenn az egyenlőség, ha a jobb oldal állandó, ekkor a tört értéke minimális:

$$\frac{1,4}{v}=0,005\,v.$$ 1 pont

Ahonnan:

$$v^2=\frac{1,4}{0,005}\approx 280,$$

$v \approx 16,73.$ 1 pont

Tehát a hajó sebessége 16,73 mérföld/óra. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. megoldás: Egy óra alatt elfogy $y=1,4+0,005\,v^2$ tonna üzemanyag.

t óra alatt: M tonna fogy el, ezért

$$t=\frac{M}{y}=\frac{M}{1,4+0,005\cdot v^2}.$$ 1 pont

$s=v\cdot t$, ezért a hajó által megtett út:

$$s=\frac{M\cdot v}{1,4+0,005\cdot v^2}.$$ 1 pont

Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük. 1 pont

A szélsőérték meghatározásához deriváljuk a függvényt:

$$s'=\frac{M(1,4+0,005\,v^2)-Mv\cdot 0,01\,v}{(1,4+0,005\,v^2)^2}$$ 3 pont

Rendezve:

$$s'=M\cdot\frac{1,4-0,005\,v^2}{(1,4+0,005\,v^2)^2}.$$ 1 pont

Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált nulla: $1,4-0,005\,v^2=0$. 1 pont

$v^2=280,$

$v\approx 16,73$ (mérföld/óra). 1 pont

Ezen a helyen az eredeti függvénynek maximuma van, ha a derivált pozitívból negatívba vált előjelet. Ez teljesül, mert a deriváltban a nevező pozitív, a számláló pedig a változó pozitív értékeinél szigorúan monoton csökken. 1 pont

Összesen: 10 pont