I. rész

1. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{(x-1)^2}{16} \le \log_5 x.$$

(*11 pont*)

2. Egy óra számlapja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy 12 órakor az egyik csúcs felé mutatnak.

a) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?

b) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából? (*12 pont*)

3. Az egészséges táplálkozásról készítettek egy kiadványt, amelyből többek között az is megtudható, hogy a koleszterin állati eredetű élelmiszereinkben található. A következő táblázat néhány élelmiszer koleszterintartalmát adja meg (mg/100 g):

1. Velő	3000	10. Sovány sertéshús	68
2. Sertésmáj	460	11. Gépsonka	45
3. Marhamáj	305	12. Szárnyashús	38
4. Kenőmájas	224	13. Füstölt karaj	36
5. Tepertő	155	14. Vaj	230
6. Téliszalámi	150	15. Ementáli sajt	135
7. Császárhús	140	16. Krémsajt	83
8. Tarja	95	17. Anyatej	20
9. Marhahús	75	18. Tehéntej	10

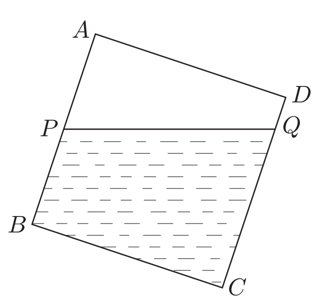
a) A táblázatban szereplő élelmiszerek közül hármat hány különböző módon lehet kiválasztani?

b) Ha a táblázatban szereplő velő, sertésmáj, marhamáj, tepertő és császárhús koleszterintartalmának összehasonlítására oszlopdiagramot készítenének, akkor hány különböző sorrendben szerepeltethetnék a kiválasztott élelmiszereket?

c) Ha a táblázatban szereplő 18 élelmiszer nevét egyforma cédulákra felírják, majd véletlenszerűen kiválasztanak közülük hármat, akkor mekkora az esélye annak, hogy a melléjük írt számok összege nem éri el a 70-et?

d) Ha a táblázatban szereplő 18 élelmiszer nevét egyforma cédulákra felírják, majd véletlenszerűen kiválasztanak közülük hármat, akkor mekkora az esélye annak, hogy a melléjük írt számok összege kisebb, mint 3000? (*14 pont*)

4. A 12 cm élhosszúságú kocka alakú edényt a $\frac{2}{3}$ részéig megtöltötték folyadékkal, majd az egyik éle mentén megbillentették egy kicsit. Az *ábra* az edény keresztmetszetét mutatja a benne lévő folyadék vízszintjével.



Tudjuk, hogy a P pont felezi az AB szakaszt. Milyen magasan van a folyadék a C csúcshoz képest? (*14 pont*)

II. rész

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán:

$$\left(\frac{1}{2} + \sin x\right)^2 + \left(y^2 + \cos x\right)^2 = 0.$$

(*16 pont*)

6. Az $f(x)$ egy másodfokú függvény, a $g(x)$ pedig fordított arányosság. Tudjuk, hogy $f(1)=g(1)=6$, $f(2)=g(2)=3$, $f(3)=g(3)=2$.

a) Van-e további x, amelyre $f(x)=g(x)$?

b) Határozzuk meg a $g(12)$ értékét.

c) Határozzuk meg az $f(15)$ értékét.

d) Található-e olyan x valós szám, amelyre $f(x)$ értéke egyenlő $g(x)$ reciprokával? (*16 pont*)

7. Legyen $N=9\cdot 2^{3n}+64\cdot 3^{4n}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan n természetes szám, amelyre N az 5-nek páratlan számú többszöröse.

b) Bizonyítsuk be, hogy N minden n természetes szám esetén osztható 73-mal. (*16 pont*)

8. Az $f(x)=\sin x$ és $g(x)=\cos x$ hozzárendeléssel megadott függvények a $[0;2\pi]$ intervallumon értelmezettek.

a) Írjuk fel $f(x)$ görbéjéhez az $x-2y=0$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintő egyenletét.

b) Mekkora területű az $f(x)$ és a $g(x)$ görbéje által határolt síkidom? (*16 pont*)

9. Az origó középpontú 5 egység sugarú körvonalra illeszkedő 12 rácspont (olyan pont, amelyek mindkét koordinátája egész szám) meghatároz egy tizenkétszöget.

a) Mutassuk meg, hogy ennek a tizenkétszögnek nincs beírt köre.

b) Számítsuk ki a tizenkétszög területét.

c) Egy 6 cm magas csonkagúla alakú margarinos dobozt terveznek a feladatban szereplő tizenkétszöghöz hasonló és 74 cm^2 területű fedőlappal. Mekkora alapterületű lesz a doboz, ha 4 deciliteresre tervezik? (*16 pont*)