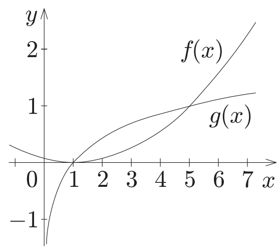
I. rész

1. *Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$\frac{(x-1)^2}{16} \le \log_5 x. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. Ábrázoljuk az $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{16}$ és a $g(x)=\log_5 x$ hozzárendeléssel megadott függvényeket. Az ábráról leolvashatjuk (és helyettesítéssel ellenőrizhetjük), hogy a két görbe $x=1$ és $x=5$ esetén metszi egymást.



Az egyenlőtlenség megoldása: $x\in[1;5]$.

2. *Egy óra számlapja* 20 cm *oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy* 12 *órakor az egyik csúcs felé mutatnak.*

a) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?

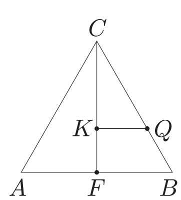
b) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A nagymutató nem lehet hosszabb a 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög beírt körének sugaránál. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe: $t=\dfrac{a^2\sqrt3}{4}$, a kerülete: $k=3a$, most $t=100\sqrt3$ cm^2, $k=60$ cm. A $t=rs$ (r a beírt kör sugara, s a kerület fele) összefüggés szerint:

$$r=\frac{100\sqrt3}{30}=\frac{10\sqrt3}{3}.$$

A nagymutató nem lehet hosszabb $\dfrac{10\sqrt3}{3}$ cm-nél.

b) A mutatók által kijelölt CKQ derékszögű háromszög hasonló a CFB derékszögű háromszöghöz (a szögeik páronként egyenlők). Az ABC szabályos háromszögben a K pont egyben a súlypont is, így $CK:CF=2:3$. Ez lesz a két háromszög hasonlóságának aránya is.



Tudjuk, hogy a területek a hasonlóság arányának négyzetével arányosak, ezért

$$t_{CKQ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot t_{CFB}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt3}{4}=\frac{200\sqrt3}{9}\approx 38{,}5 \quad (\mathrm{cm}^2).$$

Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes 38,5 cm^2 területű részt jelöl ki az óra számlapjából.

3. *Az egészséges táplálkozásról készítettek egy kiadványt, amelyből többek között az is megtudható, hogy a koleszterin állati eredetű élelmiszereinkben található. A következő táblázat néhány élelmiszer koleszterintartalmát adja meg* (mg/100 g):

1. Velő	3000	10. Sovány sertéshús	68
2. Sertésmáj	460	11. Gépsonka	45
3. Marhamáj	305	12. Szárnyashús	38
4. Kenőmájas	224	13. Füstölt karaj	36
5. Tepertő	155	14. Vaj	230
6. Téliszalámi	150	15. Ementáli sajt	135
7. Császárhús	140	16. Krémsajt	83
8. Tarja	95	17. Anyatej	20
9. Marhahús	75	18. Tehéntej	10

a) A táblázatban szereplő élelmiszerek közül hármat hány különböző módon lehet kiválasztani?

b) Ha a táblázatban szereplő velő, sertésmáj, marhamáj, tepertő és császárhús koleszterintartalmának összehasonlítására oszlopdiagramot készítenének, akkor hány különböző sorrendben szerepeltethetnék a kiválasztott élelmiszereket?

c) Ha a táblázatban szereplő 18 élelmiszer nevét egyforma cédulákra felírják, majd véletlenszerűen kiválasztanak közülük hármat, akkor mekkora az esélye annak, hogy a melléjük írt számok összege nem éri el a 70-et?

d) Ha a táblázatban szereplő 18 élelmiszer nevét egyforma cédulákra felírják, majd véletlenszerűen kiválasztanak közülük hármat, akkor mekkora az esélye annak, hogy a melléjük írt számok összege kisebb, mint 3000? (*14 pont*)

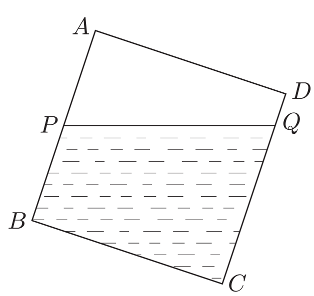
Megoldás. *a*) A táblázat 18 élelmiszere közül 3-at $\binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$ különböző módon lehet kiválasztani.

b) Az öt élelmiszert $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ különböző sorrendben lehet felsorolni, ennyi különböző sorrend szerepelhetne az oszlopdiagramokon.

c) Csak azokkal az élelmiszerekkel kell foglalkoznunk, amelyek koleszterin tartalma 70 alatti. Ilyen hat darab van a táblázatban (sovány sertéshús 68, gépsonka 45, szárnyashús 38, füstölt karaj 36, anyatej 20, tehéntej 10). Két esetben lehetséges, hogy a kiválasztott három élelmiszer koleszterintartalmának összege nem éri el a 70-et: $38 + 20 + 10$, illetve $36 + 20 + 10$. Az összes esetek száma: $\binom{18}{3}$, azaz 816. A véletlen kiválasztás esetén bármely három élelmiszer kiválasztásának valószínűségét egyenlőnek tekintjük, ezért alkalmazzuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt. A keresett valószínűség meghatározásához vesszük a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosát: $\frac{2}{816} = \frac{1}{408}$.

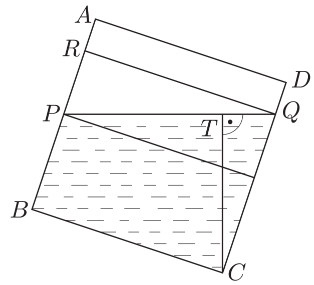
d) A táblázatban egyetlen 3000-es érték szerepel és minden további szám 1000 alatti, ezért ha a kiválasztott három cédula egyikén sem szerepel a velő, akkor a három szám összege 3000-nél kisebb. Emiatt a kedvező esetek száma: $\binom{17}{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 680$, az összes esetek száma $\binom{18}{3}$, azaz 816. A keresett valószínűség: $\frac{680}{816} = \frac{5}{6}$.

4. *A* 12 cm *élhosszúságú kocka alakú edényt a* $\frac{2}{3}$ *részéig megtöltötték folyadékkal, majd az egyik éle mentén megbillentették egy kicsit. Az* ábra *az edény keresztmetszetét mutatja a benne lévő folyadék vízszintjével.*



Tudjuk, hogy a P pont felezi az AB szakaszt. Milyen magasan van a folyadék a C csúcshoz képest? (*14 pont*)

Megoldás. Az *ábrát* kiegészítettük.



Megállapítható a következő szakaszok hossza: $PR = 4$ cm, $RQ = 12$ cm, $QC = 10$ cm. $PQR\triangle \sim QCT\triangle$, mert mindkettő derékszögű, továbbá a C-nél és a Q-nál lévő hegyesszögük egyenlő (merőleges szárú szögek). Mivel $PR : RQ = 4 : 12 = 1 : 3$, ezért $QT : TC = 1 : 3$, azaz $QT = \dfrac{TC}{3}$. A QTC derékszögű háromszögre felírható a Pitagorasz-tétel: $\left(\dfrac{TC}{3}\right)^2 + TC^2 = 100$, amiből $TC = 3\sqrt{10} \approx 9{,}5$.

Vagyis 9,5 cm magasan van a folyadék szintje a C csúcshoz képest.

II. rész

5. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán:*

$$\left(\frac{1}{2} + \sin x\right)^2 + \left(y^2 + \cos x\right)^2 = 0. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. Két nem negatív szám összege akkor lehet 0, ha mindkettő 0. Ezért $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, azaz $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$, továbbá $y^2 + \cos x = 0$. Az x_1 esetén $\cos x > 0$, így $y^2 + \cos x = 0$ nem teljesülhet semmilyen valós y értékre sem. Az x_2 esetén $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, vagyis $y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, amiből

$$y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}93, \qquad y_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx -0{,}93.$$

A megoldás: $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ vagy $y = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

6. *Az $f(x)$ egy másodfokú függvény, a $g(x)$ pedig fordított arányosság. Tudjuk, hogy $f(1) = g(1) = 6$, $f(2) = g(2) = 3$, $f(3) = g(3) = 2$.*

a) Van-e további x, amelyre $f(x) = g(x)$?

b) Határozzuk meg a $g(12)$ értékét.

c) Határozzuk meg az $f(15)$ értékét.

d) Található-e olyan x valós szám, amelyre $f(x)$ értéke egyenlő $g(x)$ reciprokával? (*16 pont*)

Megoldás. Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hozzárendelésű másodfokú függvény. Tudjuk, hogy $f(1) = a + b + c = 6$, $f(2) = 4a + 2b + c = 3$, $f(3) = 9a + 3b + c = 2$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása: $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$, azaz $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

Legyen $g(x) = \dfrac{d}{x}$ hozzárendelésű fordított arányosság. Tudjuk, hogy $g(1) = \dfrac{d}{1} = 6$, azaz $g(x) = \dfrac{6}{x}$, és ekkor a másik két feltétel is teljesül.

a) Keressük az összes valós x értéket, amelyre $f(x) = g(x)$, vagyis keressük az $x^2 - 6x + 11 = \dfrac{6}{x}$ egyenlet megoldását. x-szel szorozhatunk $(x \neq 0)$, majd rendezünk: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Ennek az egyenletnek az 1, 2 és a 3 gyökei, de egy harmadfokú egyenletnek 3-nál több valós gyöke nincs, így további megfelelő x nem létezik.

b) $g(12) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

c) $f(15) = 15^2 - 6 \cdot 15 + 11 = 146$.

d) Keressük az $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, azaz $x^2 - 6x + 11 = \dfrac{x}{6}$ egyenlet megoldását. A szorzás és a rendezés után: $6x^2 - 37x + 66 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa negatív, így nincs olyan valós szám, amelyre $f(x)$ értéke egyenlő lenne $g(x)$ reciprokával.

7. *Legyen* $N = 9 \cdot 2^{3n} + 64 \cdot 3^{4n}$.
a) *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan* n *természetes szám, amelyre* N *az* 5*-nek páratlan számú többszöröse.*
b) *Bizonyítsuk be, hogy* N *minden* n *természetes szám esetén osztható* 73*-mal.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $n = 0$, akkor $N = 73$, egyébként az N két páros szám összege, tehát páros, így nem lehet egyenlő az 5 páratlan többszörösével.
b) $N = 9 \cdot 2^{3n} + 64 \cdot 3^{4n} = 64 \cdot 81^n + 9 \cdot 8^n = 64(81^n - 8^n) + 73 \cdot 8^n$. Mivel a $81^n - 8^n$ különbség $(81 - 8)(81^{n-1} + 81^{n-2} \cdot 8 + \ldots + 81 \cdot 8^{n-2} + 8^{n-1})$ alakban írható, így látható, hogy $64(81^n - 8^n)$ és $73 \cdot 8^n$ is osztható 73-mal, ami a bizonyítandó állítást jelenti.

8. *Az* $f(x) = \sin x$ *és* $g(x) = \cos x$ *hozzárendeléssel megadott függvények a* $[0; 2\pi]$ *intervallumon értelmezettek.*
a) *Írjuk fel* $f(x)$ *görbéjéhez az* $x - 2y = 0$ *egyenletű egyenessel párhuzamos érintő egyenletét.*
b) *Mekkora területű az* $f(x)$ *és a* $g(x)$ *görbéje által határolt síkidom?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $x - 2y = 0$ egyenletű egyenes normálvektora: $\vec{n}(1; -2)$, meredeksége $\dfrac{1}{2}$.

Az $f(x)$ függvény görbéjéhez az x helyen húzott érintő meredeksége: $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Vagyis a $\cos x = \dfrac{1}{2}$ egyenlet megoldását kell megadnunk a $[0; 2\pi]$-n. Két megfelelő értéket kapunk x-re:

I. eset: $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, ekkor $f(x_1) = \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, azaz az érintő illeszkedik a $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ koordinátájú pontra. Ekkor az érintő egyenlete: $x - 2y = \dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

II. eset: $x_2 = \dfrac{5\pi}{3}$, ekkor $f(x_2) = \sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, azaz az érintő illeszkedik az $\left(\dfrac{5\pi}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ koordinátájú pontra. Ekkor az érintő egyenlete: $x - 2y = \dfrac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$.

b) A $[0; 2\pi]$-n az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \cos x$ görbéje $x = \dfrac{\pi}{4}$-nél és $x = \dfrac{5\pi}{4}$-nél metszi egymást, a zárt síkidomot a $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ koordinátájú pontok közötti két görbe határolja. A $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$-n az $f(x)$ van felül, és a síkidom egy része az x tengely alatt található. Tudjuk, hogy a síkidom területe ebben az esetben is a következő határozott integrállal egyenlő:

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx.$$

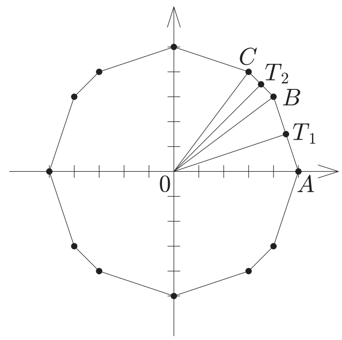
Ezt Newton–Leibniz tétele segítségével számíthatjuk ki:

$$T = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

(területegység).

9. *Az origó középpontú* 5 *egység sugarú körvonalra illeszkedő* 12 *rácspont (olyan pont, amelyek mindkét koordinátája egész szám) meghatároz egy tizenkétszöget.*
a) *Mutassuk meg, hogy ennek a tizenkétszögnek nincs beírt köre.*
b) *Számítsuk ki a tizenkétszög területét.*
c) *Egy* 6 cm *magas csonkagúla alakú margarinos dobozt terveznek a feladatban szereplő tizenkétszöghöz hasonló és* 74 cm^2 *területű fedőlappal. Mekkora alapterületű lesz a doboz, ha* 4 *deciliteresre tervezik?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A tizenkétszög három szomszédos csúcsa: $A(5; 0)$, $B(4; 3)$, $C(3; 4)$. Ha lenne beírt köre a tizenkétszögnek, akkor egy origó középpontú körnek érintenie kellene az $AB = \sqrt{10}$ és a $BC = \sqrt{2}$ hosszúságú oldalakat is. A sokszög ugyanis középpontosan szimmetrikus az origóra, így ha van beírt kör, annak középpontja az origó.



Az OAB egyenlő szárú háromszögben az O-ból húzható OT_1 magasság hosszát Pitagorasz-tétellel kiszámíthatjuk:

$$OT_1 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10} \quad \text{(egység)}.$$

Az OBC egyenlő szárú háromszögben az O-ból húzható OT_2 magasság hosszát is Pitagorasz-tétellel kiszámíthatjuk:

$$OT_2 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2} \quad \text{(egység)}.$$

Mivel $OT_1 \neq OT_2$, így láthatóan nincs beírt köre a tizenkétszögnek.

b) A feladatban szereplő tizenkétszög 8 db OAB háromszöggel egybevágó, és 4 db OBC háromszöggel egybevágó háromszögből rakható össze. Ezen egyenlő szárú háromszögek alapjainak és alapjaihoz tartozó magasságainak meghatározása után kiszámítjuk a területüket:

$$t_{OAB} = \frac{\sqrt{10} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2}, \qquad t_{OBC} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{7}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{2}.$$

Az előzőek alapján a tizenkétszög területe:

$$T = 8 \cdot t_{OAB} + 4 \cdot t_{OBC} = 8 \cdot \frac{15}{2} + 4 \cdot \frac{7}{2} = 74 \quad \text{(területegység)}.$$

c) A doboz térfogata 400 cm^3. Alkalmazzuk a csonkagúla térfogatképletét: $V = \frac{m}{3}\big(T + \sqrt{Tt} + t\big)$. Amit tudunk, azt helyettesítsük be: $400 = \frac{6}{3}\big(74 + \sqrt{74t} + t\big)$. Ekkor a $\sqrt{t}$-re másodfokú, $t + \sqrt{74} \cdot \sqrt{t} - 126 = 0$ egyenletet kapjuk. Az egyenlet pozitív gyökéből számítható az alaplap területe: $t \approx 59{,}6$ cm^2.