Legyen x tetszőleges valós szám. A feltételek szerint:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ és f a 0-ban folytonos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n}\right) = f(0),$$

tehát f állandó.

Az egyenlőséget kielégítő nem folytonos függvények például a következők:

$$f_1(x) = \begin{cases} \{\log_2 |x|\}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

$\{a\}$-val a szám törtrészét jelöltük ($0 \le \{a\} < 1$ és $a - \{a\}$ egész). Ekkor ugyanis

$$f_1(2x) = \{\log_2 2|x|\} = \{1 + \log_2 |x|\} = \{\log_2 |x|\} = f_1(x).$$

Könnyen látható, hogy az f_1 függvény a $(\pm 2^k)$ (k egész) helyeken nem folytonos,

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \text{ racionális;} \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irraciomális.} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x = 2^k \ (k \text{ egész}); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Horváth Tibor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Nagy Attila (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A bizonyításnál f-nek csak a 0-beli folytonosságát használtuk ki.

2. Sokan voltak, akik bár helyesen idézték a folytonosság definícióját, helytelenül alkalmazták. Ezért tűnik szükségesnek kihangsúlyozni, hogy egy függvény csak értelmezési tartományának valamely pontjában lehet folytonos vagy nem folytonos.