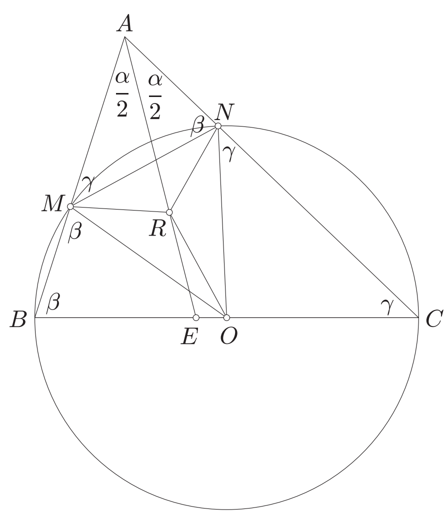
A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Legyen ABC hegyesszögű háromszög, amiben $AB \neq AC$. A BC átmérőjű kör az AB, ill. AC oldalakat az M, ill. N pontokban metszi. Jelölje O a BC oldal középpontját. A $BAC\sphericalangle$ és $MON\sphericalangle$ szögek szögfelezői az R pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a BMR és CNR háromszögek körülírt köreinek van olyan közös pontja, ami a BC oldalon fekszik.*

Paulin Roland megoldása. Thálész tétele alapján $BMC\sphericalangle = BNC\sphericalangle = 90^\circ$, így M és N a magasságok talppontjai, melyek az ABC háromszög AB, illetve AC oldalainak belsejében vannak, mert a háromszög hegyesszögű.

$BMNC$ húrnégyszög, így $AMN\sphericalangle = \gamma$, $ANM\sphericalangle = \beta$. OBM és OCN egyenlő szárú háromszögekben $OMB\sphericalangle = \beta$, $ONC\sphericalangle = \gamma$, vagyis $OMN\sphericalangle = ONM\sphericalangle = \alpha$, $MON\sphericalangle = \pi - 2\alpha$.



Belátjuk, hogy a BAC és MON szögek szögfelezői – e és f – nem párhuzamosak, így R egyértelműen meghatározott. $e \parallel f$ esetén legyen $f \cap AC = D$. A DOC háromszögben D-nél $\dfrac{\alpha}{2}$, C-nél γ, O-nál

$$CON\sphericalangle + \frac{NOM\sphericalangle}{2} =$$

$$= (\pi - 2\gamma) + \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha$$

szög van, így a szögösszeg

$$\pi = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{3}{2}\pi - 2\gamma - \alpha.$$

Rendezve:
$$\frac{\alpha}{2}+\gamma=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha+2\gamma=\pi=\alpha+\beta+\gamma \quad\Rightarrow\quad \gamma=\beta \quad\Rightarrow\quad AB=AC.$$
Ezt a feltétel kizárja, így $e \nparallel f$.

Legyen I az OMN háromszög beírt körének középpontja. $IMN\sphericalangle=INM\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}$ miatt $MIN\sphericalangle=\pi-\alpha$, ezért $AMIN$ húrnégyszög, így $IAN\sphericalangle=IMN\sphericalangle=\frac{\alpha}{2}$. Tehát $I\in e$, ugyanakkor $I\in f$ is teljesül, ezért $R=I$.

Legyen $E=e\cap BC$. Ez a BC oldal egy belső pontja. Belátjuk, hogy a BMR és a CNR háromszögek körülírt köre is átmegy E-n. $REB\sphericalangle=AEB\sphericalangle=\pi-\beta-\frac{\alpha}{2}$, $REC\sphericalangle=AEC\sphericalangle=\pi-\gamma-\frac{\alpha}{2}$, míg $RMB\sphericalangle=\beta+\frac{\alpha}{2}$, $RNC\sphericalangle=\gamma+\frac{\alpha}{2}$, így $RMB\sphericalangle+REB\sphericalangle=RNC\sphericalangle+REC\sphericalangle=\pi$. Azaz $RMBE$ és $RNCE$ húrnégyszögek, így az RMB és az RNC háromszögek körülírt körének van közös pontja a BC oldalon.

2. *Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely kielégíti a*
$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2\,P(a+b+c)$$
egyenlőséget, valahányszor a, b, c olyan valós számok, amelyekre teljesül
$$ab+bc+ca=0.$$

Hubai Tamás megoldása. Ha $a=b=c=0$, akkor a feltétel teljesül, így $3P(0)=2P(0)$, vagyis $P(0)=0$. A feltétel nyilván akkor is teljesül, ha $b=c=0$, és így $P(a)+P(0)+P(-a)=2P(a)$, ahonnan $P(-a)=P(a)$ adódik minden valós a-ra. A $P(x)$ polinomfüggvény tehát páros, ami csak úgy lehetséges, ha minden páratlan fokú tagja nulla. (A $P(-a)=P(a)$ feltételt átrendezve ugyanis azt kapjuk, hogy $P(x)-P(-x)$ az azonosan nulla polinom, ebben a különbségben pedig éppen a $P(x)$ páratlan fokú tagjai szerepelnek.)

Legyen ezután $Q(x)$ az a polinom, amelyben $P(x)$ tagjai szerepelnek félakkora kitevővel, azaz amelyre $Q(x^2)=P(x)$ és nézzük meg, minek kell teljesülnie a $Q(x)$ polinomra. Az a, b, c közti összefüggést felhasználva csökkentsük a változók számát. Vezessük be az x és y változókat a következőképpen: legyen $a=x+y+c$, $b=y+c$. Ilyen x és y nyilván minden a, b és c hármashoz létezik, másrészt x és y bármely értékére van olyan a, b, c számhármas, amelyre teljesül a feltétel. Ez egész pontosan azt jelenti, hogy az $a=x+y+c$, $b=y+c$, $ab+bc+ca=0$ egyenletrendszernek létezik (a,b,c) megoldása. Behelyettesítve ugyanis az $(x+y+c)(y+c)+(y+c)c+c(x+y+c)=0$ egyenletet kapjuk, ami rendezés után a c-ben másodfokú:
$$3c^2+(2x+4y)c+(xy+y^2)=0,$$
a diszkriminánsa, $4x^2+4xy+4y^2=2\big(x^2+y^2+(x+y)^2\big)$ pedig nem negatív.

Fejezzük ki a feltételben szereplő mennyiségeket az új változók, x és y segítségével: $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=-x-y$, illetve
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$$
(felhasználva, hogy a feltétel szerint $ab+bc+ca=0$ és tovább alakítva)
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}=$$
$$=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}=x^2+y^2+xy.$$

A P polinomra tehát, mint láttuk, akkor és csak akkor teljesülnek a feladat feltételei, ha bármely valós x, y számpárra fennáll, hogy

$$P(x)+P(y)+P(x+y)=2P\left(\sqrt{x^2+y^2+xy}\right).$$

(Vegyük észre, hogy a bal oldal harmadik tagja eredetileg $P(c-a)=P(-x-y)$, ami most azért írható $P(x+y)$ alakban, mert a P páros függvény.)

A $Q(x)$ polinomra nézve ez azt jelenti, hogy

(1)
$$Q(x^2)+Q(y^2)+Q(x^2+y^2+2xy)=2Q(x^2+y^2+xy).$$

Az egyenlőségben x két polinomja áll, melyekben az együtthatók az y változó polinomjai. Tegyük fel, hogy a $Q(x)$ polinom n-edfokú és legyen az $n>1$. A $Q(x)$ főegyütthatójával (1)-ben lehet osztani, föltehető tehát, hogy az 1. Mivel (1)-ben két polinom egyenlősége áll, a két oldalon az x változó minden előforduló hatványának egyenlő az együtthatója. Nekünk az x^{2n-2} tagot érdemes figyelnünk. Ha x^{n-1} együtthatója a $Q(x)$-ben λ, akkor x^{2n-2} együtthatói (1) két oldalán:

$$\lambda+0+\left(\lambda+ny^2+\binom{n}{2}\cdot 4y^2\right)=2\left(\lambda+ny^2+\binom{n}{2}\cdot y^2\right).$$

Rendezés után innen $2\cdot\binom{n}{2}=n$, azaz $n>1$ miatt $n=2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $n\le 2$, a $Q(x)$ tehát legfeljebb másodfokú, a $P(x)$ így legfeljebb negyedfokú páros polinom, amelynek a konstans tagja nulla: $P(x)=\alpha\cdot x^4+\beta\cdot x^2$.

Megmutatjuk, hogy ezekre a polinomokra teljesül a feladat feltétele. Ezt elég abban a két speciális esetben igazolni, ha $P(x)=x^4$, illetve $P(x)=x^2$. Könnyen ellenőrizhető ugyanis, hogy két megoldás összege, illetve egy megoldás számszorosa is megoldás, így pedig valamennyi adott alakú polinomot megkapjuk a fenti két speciális polinomból.

Ha $P(x)=x^4$, akkor

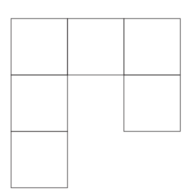
$$\begin{aligned}
&2P(a+b+c)-P(a-b)-P(b-c)-P(c-a)=\\
&=2(a+b+c)^4-(a-b)^4-(b-c)^4-(c-a)^4=\\
&=12(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3)+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+\\
&\quad+24(a^2bc+b^2ac+c^2ab)=\\
&=6(ab+bc+ca)^2+12(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0.
\end{aligned}$$

Ha pedig $P(x)=x^2$, akkor

$$\begin{aligned}
&2P(a+b+c)-P(a-b)-P(b-c)-P(c-a)=\\
&=2(a+b+c)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=\\
&=2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-(a^2+b^2-2ab)-\\
&\quad-(b^2+c^2-2bc)-(c^2+a^2-2ca)=6(ab+bc+ca)=0.
\end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük, a keresett polinomok a $P(x)=\alpha\cdot x^4+\beta\cdot x^2$ alakba írhatók, ahol α és β tetszőleges valós számok.

3. *Nevezzük* horog*nak az alábbi ábrán látható, hat egységnégyzetből álló alakzatot*

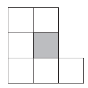


valamint minden olyan alakzatot, amely ebből forgatásokkal és tükrözésekkel kapható.

Határozzuk meg az összes olyan $m\times n$-es téglalapot, ami lefedhető horgokkal úgy, hogy

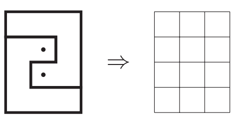
- *a lefedés hézagmentes és átfedések nélküli,*
- *semelyik horognak nem nyúlik semelyik része sem a téglalapon kívülre.*

Rácz Béla András megoldása. Feltehetjük, hogy egy lefedett téglalap m, n oldalai egészek, illetve hogy minden horog éppen hat egységnégyzetet fed le, amelyek szerepelnek az egész téglalap egységnégyzetekre bontásában.[1]

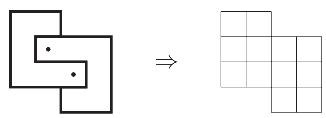


1. ábra

Tekintsünk egy horgot és a hozzá tartozó „középső” mezőt (*1. ábra*). Ez a mező a lefedni kívánt téglalap belsejében van, egy másik horognak tehát le kell fednie. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez csak kétféle módon lehetséges (*2a., 2b. ábra*).



2*a. ábra*

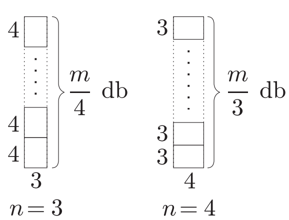


2*b. ábra*

Az egymás „közepét” kölcsönösen lefedő két horgot „összeragasztva” kétféle 12 területű csempét kapunk: a 3×4-es téglalapot és ennek „ferde” formáját. A téglalap területe, $m \cdot n$ tehát osztható 12-vel, hiszen a lefedésben nyilván egész számú csempe vesz részt. Így $3 \mid m$ vagy $3 \mid n$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehető, hogy $3 \mid m$. Vizsgáljuk most már azt, hogy m, illetve n a 2-nek milyen hatványával osztható.

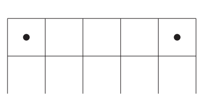
(I) $4 \mid m$, azaz $12 \mid m$.

Ha $n = 1$ vagy 2, akkor a lefedés nyilván lehetetlen, ha $n = 3$ vagy 4, akkor a téglalap már 3×4-es csempékkel is lefedhető (*3. ábra*).



3. ábra

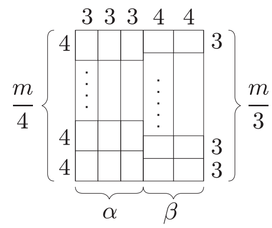
Ha $n = 5$, akkor a két „szomszédos” sarokmezőt két különböző csempe fedi csak le, ezek viszont nem férnek el átfedés nélkül (*4. ábra*).



4. ábra

[1] Ennek bizonyítását az értékelés során nem várták el a versenyzőktől; maga a bizonyítás nem nehéz, inkább technikai jellegű.

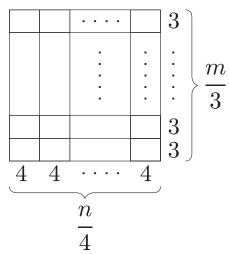
Ha $n \geq 6$, akkor – $12 \mid m$ esetén – az $n \times m$-es téglalap lefedhető 3×4-es csempékkel. Ha ugyanis $n = 3\alpha + 4\beta$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, akkor a megfelelő lefedés az *5. ábrán* látható. Ha pedig $n \geq 6$, akkor létezik a megfelelő felbontás, hiszen $6 = 3 + 3$, $7 = 3 + 4$, $8 = 4 + 4$, végül ha n előáll ilyen alakban, akkor nyilván $n + 3$ is.



5. ábra

Vegyük észre, hogy lényegében újra igazoltuk a már tárgyalt $n = 3, 4$ eseteket.

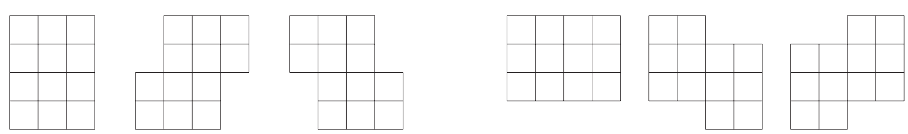
(II) Ha $4 \mid n$, akkor a lefedés nyilván megvalósítható 3×4-es csempékkel (*6. ábra*).



6. ábra

(III) Ha sem (I) sem pedig (II) nem teljesül, azaz $4 \nmid m$ és $4 \nmid n$, akkor $4 \mid mn$ miatt m is és n is páros. Azt állítjuk, hogy ilyenkor a megfelelő lefedésben szükségképpen páros sok csempe vesz részt és így a téglalap területe osztható 8-cal. Ez viszont nem lehetséges, ha egyik oldal hossza sem osztható 4-gyel, így ilyenkor nincs megfelelő lefedés.

Színezzük ki a lefedett téglalap mezőit úgy, hogy minden negyedik oszlop fekete legyen, a többi pedig fehér. Ekkor a fekete mezők száma páros, hiszen minden oszlopban páros sok mező van. Csoportosítsuk a lefedésben részt vevő csempéket a *7. ábra* szerint.



„álló” csempék „fekvő” csempék

7. ábra

Minden „álló” csempe páros sok fekete mezőt fed le, egy-egy fekvő csempe pedig páratlan sokat (3-at), ezért páros sok „fekvő” csempe vesz részt a lefedésben. Ha pedig az oszlopok helyett minden negyedik sort színezünk feketére, akkor ugyanígy kapjuk, hogy az „álló” csempék száma páros.

Így tehát összesen is páros számú csempe van, a megfelelő lefedés ebben az esetben nem létezik.

Összefoglalva: a lehetséges m és n értékek a következők:

- $3 \mid m$ és $4 \mid n$; és szimmetrikusan • $3 \mid n$ és $4 \mid m$;
- $12 \mid m$ és $n \geq 6$; • $12 \mid n$ és $m \geq 6$.

Megjegyzések. 1. Az adott felsorolásban bizonyos $(m; n)$ számpárok többször is előfordulhatnak.

2. Látható, hogy a „ferde” csempéket nem tudjuk hasznosítani, ami egyáltalán lefedhető, ahhoz elegendőek a 3×4-es csempék is.

4. *Legyen $n \geq 3$ egész szám. Legyenek $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pozitív valós számok, amelyekre teljesül*

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Mutassuk meg, hogy t_i, t_j, t_k egy háromszög oldalhosszai minden olyan i, j, k esetén, amikre $1 \leq i < j < k \leq n$ teljesül.

Egri Attila megoldása. A bizonyítás indirekt: Tegyük fel, hogy valamilyen a, b és c számokra t_a, t_b és t_c nem egy háromszög oldalai, tehát pl. $t_a \geq t_b + t_c$.

A feladat szerint:

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\dots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}\right)=$$

$$=n+\sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)=n+\sum_{\substack{i<j\\ i,j\notin\{a;b;c\}}}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)+\frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}+\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b}.$$

A jobb oldalon a szumma jelen belül használjuk fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$-ra $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$. Így azt kapjuk, hogy

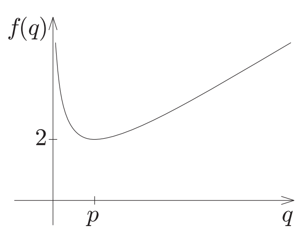
$$n^2+1>n+2\cdot\left[\binom{n}{2}-3\right]+\frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}+\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b}. \tag{1}$$

Belátjuk, hogy az indirekt $t_a \geq t_b+t_c$ feltevésből a nyilvánvaló $T=\dfrac{t_a}{t_b}+\dfrac{t_b}{t_a}+\dfrac{t_a}{t_c}+\dfrac{t_c}{t_a}+\dfrac{t_b}{t_c}+\dfrac{t_c}{t_b}\geq 6$ becslésnél erősebb $T\geq 7$ is megkapható.

Ehhez használjuk fel, hogy ha p-t rögzítjük és q-t p felé közelítjük, akkor $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$ értéke csökken. Ez leolvasható az $f(q)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$ grafikonjáról (*ábra*), de közvetlen bizonyítás is nyomban adódik:

$$pqr\big(f(q)-f(r)\big)=p^2r+q^2r-r^2p-q^2p=(r-p)(q^2-rp).$$

Ha pedig r elválasztja p-t és q-t, akkor a szorzat tényezői azonos előjelűek, így $0\leq p,q,r$ miatt $f(q)\geq f(r)$ valóban.



Ezek után írjunk T-ben t_a helyére (t_b+t_c)-t. Mivel $t_a\geq t_b+t_c\geq t_b$ és $t_a\geq t_b+t_c\geq t_c$, azért a fentiek szerint ezzel T csökken.

$$\frac{t_a}{t_b}+\frac{t_b}{t_a}\geq\frac{t_b+t_c}{t_b}+\frac{t_c}{t_b+t_c}=1+\frac{t_c}{t_b}+\frac{t_b}{t_b+t_c},\quad\text{illetve}$$

$$\frac{t_a}{t_c}+\frac{t_c}{t_a}\geq\frac{t_b+t_c}{t_c}+\frac{t_c}{t_b+t_c}=1+\frac{t_b}{t_c}+\frac{t_c}{t_b+t_c}.$$

Így $T\geq 2+2\big(\frac{t_c}{t_b}+\frac{t_b}{t_c}\big)+1\geq 7$, hiszen $\dfrac{t_c}{t_b}+\dfrac{t_b}{t_c}\geq 2$. Ezzel pedig (1) a következőképpen alakul:

$$n^2+1>n+2\left[\binom{n}{2}-3\right]+7=n^2+1,$$

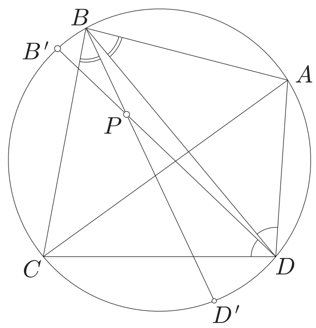
tehát $n^2 + 1 > n^2 + 1$. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a feladat állítása igaz: minden $i < j < k$-ra teljesül, hogy t_i, t_j és t_k egy háromszög oldalai.

5. *Egy $ABCD$ konvex négyszögben a BD átló nem szögfelezője sem az $ABC\sphericalangle$, sem a $CDA\sphericalangle$ szögnek. A P pont az $ABCD$ négyszög belsejében fekszik, és teljesül rá*

$$PBC\sphericalangle = DBA\sphericalangle \quad \text{és} \quad PDC\sphericalangle = BDA\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $ABCD$ akkor és csak akkor húrnégyszög, ha $AP = CP$.

Kocsis Albert Tihamér megoldása. Először azt látjuk be, hogy ha $ABCD$ húrnégyszög, akkor $PA = PC$. Legyen BP és a kör metszéspontja D', DP és a kör metszéspontja pedig B' (*1. ábra*).



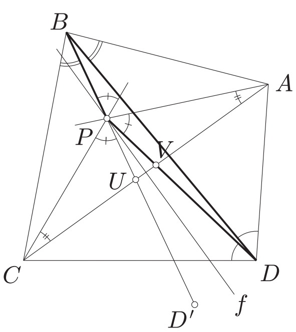
1. ábra

$ABD\sphericalangle = D'BC\sphericalangle$, az $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{D'C}$ ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, így D és D' az AC felező merőlegesére tükrösek. Ekkor a BD' és a $B'D$ egyenesek is tükrösek erre a felező merőlegesre, a metszéspontjuk, P tehát rajta van az AC felező merőlegesén és így valóban $PA = PC$.

A megfordításhoz legyen $PA = PC$. Belátjuk, hogy a feladat feltételei mellett $ABCD$ húrnégyszög. Először egy segédtételre lesz szükségünk:

Ha adott egy XYZ háromszög és a síkjában egy Q pont, akkor a háromszög csúcsait a Q-val összekötő egyeneseknek az adott csúcson átmenő belső szögfelezőkre vonatkozó tükörképei egy ponton haladnak át (esetleg párhuzamosak). A bizonyítás megtalálható például Reiman István – Dobos Sándor: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák (1959–2003)* (Typotex Kiadó, Budapest) c. könyvének függelékében.

Most a BPD háromszög játssza az XYZ háromszög szerepét, a Q pontét pedig az A pont. DA tükörképe a PDB szög felezőjére éppen a DC egyenes, míg a BA tükörképe a DBP szög felezőjére a BC egyenes. Ez a két egyenes most a C pontban metszi egymást, így a PA egyenesnek a DPB szög felezőjére vonatkozó tükörképe a segédtétel állítása szerint átmegy a C ponton (*2. ábra*). Ez a tükörkép tehát a CP egyenes.



2. ábra

Ekkor $APB\sphericalangle = 180° - DPC\sphericalangle$, így ha $U = PB \cap AC$ és $V = DP \cap AC$, akkor $VPC\sphericalangle = APU\sphericalangle$. Miután a feltétel szerint $PA = PC$, továbbá $PAU\sphericalangle = PCV\sphericalangle$, így $PUV\sphericalangle = PVU\sphericalangle$, a PUV háromszög egyenlő szárú. Jelölje az AC felező merőlegesét f.

Ekkor PD és PB tükrösek f-re, ez ugyanis a PUV háromszög szimmetriatengelye, a PD és PB egyenesek pedig a szárai.

Legyen a D csúcs tükörképe f-re D'. Az előbbi szimmetria miatt D' illeszkedik a PB egyenesre. A feltétel miatt $ABD\sphericalangle = D'BC\sphericalangle$, tehát az $ADD'C$ szimmetrikus trapézban az egyenlő hosszú AD és $D'C$ szakaszok a B pontból egyenlő szögben látszanak. Az AD szakasz ABD szögű látóköre és a $D'C$ szakasz $D'BC$ szögű látóköre tehát egybevágó, másrészt ez a két kör is szimmetrikus az f-re. Ha egybeesnek, akkor B rajta van ezen a körön, amely egyébként a szimmetrikus $ADD'C$ trapéz körülírt köre és készen vagyunk, $ABCD$ húrnégyszög.

Ha a két látókör nem esik egybe, akkor B metszéspontjuk rajta van a két kör f szimmetriatengelyén. A fenti gondolatmenetet az ADC helyett az ABC háromszögre és a megfelelő B' pontra megismételve kapjuk, hogy ha a négy pont, A, B, C, D nincs egy körön, akkor D is rajta van az f egyenesen. Ha tehát nem igaz az állítás, akkor BD az AC átló felezőmerőlegese, az $ABCD$ négyszög deltoid, BD felezi mind az ADC, mind pedig az ABC szöget. Ezt viszont a feltétel kizárja, az adott feltételek esetén tehát $ABCD$ valóban húrnégyszög.

6. *Egy pozitív egész számot* alternáló*nak nevezünk, ha a tízes számrendszerbeli felírásában a szomszédos számjegyek mindig különböző paritásúak.*

Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amire igaz az, hogy n-nek van olyan többszöröse, ami alternáló szám.

Pach Péter Pál megoldása. Ha $20 \mid n$, akkor az n utolsó jegye 0 és $4 \mid n$ miatt az utolsó előtti jegy páros, így ekkor az n-nek nincsen alternáló többszöröse. A továbbiakban több lépésben igazoljuk, hogy a $20 \nmid n$ feltétel elégséges, ebben az esetben létezik olyan alternáló szám, amelyik osztható n-nel.

a) Legyen először $n = 2^k$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan alternáló számokból álló $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ sorozat, amelyben A_k-nak k jegye van ($k = 1, 2, \dots$), A_{k+1} az A_k „folytatása", tehát első jegyét elhagyva A_k-t kapjuk, $2^k \mid A_k$, továbbá $2^{k+1} \mid A_k$ pontosan akkor teljesül, ha k páros. Az A_k sorozatot teljes indukcióval állítjuk elő: $k = 1$, illetve $k = 2$ esetén $A_1 = 2$ és $A_2 = 32$ megfelelő.

Legyen $k \geq 2$ páros és tegyük fel, hogy az A_k számot már megadtuk a feltételeknek megfelelően, tehát A_k k-jegyű alternáló szám és osztható 2^{k+1}-nel. Mivel k páros, A_k első jegye páratlan. Így akár 2-est, akár 4-est írunk a szám elejére, $(k+1)$-jegyű alternáló számot kapunk és $2^{k+1} \mid 2 \cdot 10^k$, illetve $2^{k+1} \mid A_k$ miatt mindkét esetben 2^{k+1} többszörösét kapjuk. Mivel $k+1$ páratlan, meg kell még mutatnunk, hogy $2 \cdot 10^k + A_k$ és $4 \cdot 10^k + A_k$ valamelyike nem osztható 2^{k+2}-nel. Ez nyilvánvaló, ellenkező esetben ugyanis a különbségük, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$ is osztható volna 2^{k+2}-nel. Így ha k páros, akkor létezik a megfelelő A_{k+1}.

Legyen most a k páratlan. Ekkor A_k első jegye páros, így 1-et, illetve 3-at írva a szám elejére $(k+1)$-jegyű alternáló számot kapunk. A konstrukció szerint $2^k \mid A_k$ és $2^{k+1} \nmid A_k$, így $A_k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$, továbbá nyilván $1 \cdot 10^k \equiv 3 \cdot 10^k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$. A megfelelő kongruenciákat összeadva kapjuk, hogy mindkét így adódó szám osztható 2^{k+1}-nel. Mivel a különbségükben, $2 \cdot 10^k = 2^{k+1} \cdot 5^k$-ban is $k+1$ a 2 kitevője, azért legalább az egyikük még 2^{k+2}-nel is osztható. Így az $A_{k+1} = 10^k + A_k$ vagy $A_{k+1} = 3 \cdot 10^k + A_k$ választás megfelelő.

b) Ha $n = 5^k$, akkor ismét indukcióval megmutatjuk, hogy az n-nek van legfeljebb k-jegyű B_k alternáló többszöröse. (B_k legelső jegye lehet 0 is.)

Ha $k = 1$, akkor $B_1 = 5$ megfelelő. Legyen $k \geq 1$ és a B_k olyan, legfeljebb k-jegyű alternáló szám, amelyre $B_k \equiv 0 \pmod{5^k}$. Ekkor valamilyen $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ számra $B_k \equiv i \cdot 5^k \pmod{5^{k+1}}$. Ha B_k elejére egy újabb x számjegyet akarunk betoldani, akkor az oszthatósághoz

$$x \cdot 10^k + B_k \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}, \quad \text{azaz} \quad x \cdot 10^k + i \cdot 5^k = 5^k(x \cdot 2^k + i) \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$$

szükséges. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x \cdot 2^k + i \equiv 0 \pmod 5$. Mivel $(2^k; 5) = 1$, azért ennek a kongruenciának van megoldása mod 5. Végül vegyük észre, hogy az x paritását megválaszthatjuk, hiszen a páros, illetve a páratlan számjegyek is egy-egy teljes maradékrendszert alkotnak (mod 5). Így a megfelelő választással $B_{k+1} = x \cdot 10^k + B_k$ is alternáló szám lesz, amely osztható 5^{k+1}-nel.

c) Ha $(10; n) = 1$, akkor a feladat állításán túlmenően azt igazoljuk, hogy az $x \equiv r \pmod n$ kongruenciának minden r maradék esetén létezik adott paritású alternáló megoldása.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor van olyan teljes maradékrendszer (mod n), amelynek az elemei csak a 2 és a 0 számjegyeket tartalmazzák.

Az Euler–Fermat-tétel szerint ugyanis $10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, így ha $k_1, k_2, \dots, k_r$ különböző pozitív egészek, akkor

$$T_r = 10^{k_1\varphi(n)} + 10^{k_2\varphi(n)} + \ldots + 10^{k_r\varphi(n)} \equiv \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{r} \equiv r \pmod n,$$

a T_r számokból tehát teljes maradékrendszer készíthető (mod n). Mivel $(2; n) = 1$, azért a $2T_r$ számok is teljes maradékrendszert alkotnak (mod n) és rendelkeznek az előírt tulajdonsággal.

Tekintsünk most egy olyan $H = 1010\ldots10$ alakú alternáló számot, amely a fenti $2T_r$ alakú számokból álló teljes maradékrendszer minden eleménél több jegyből áll. Ekkor az $A + 2T_r$ alakú számok is teljes maradékrendszert alkotnak (mod n), másrészt maguk is alternálók, hiszen a H alternáló számhoz olyan „rövidebb" számokat adtunk, amelyek minden jegye páros és a jegyek kicsik, tehát nincs tízes átlépés. Ebben az alternáló teljes maradékrendszerben minden szám páros.

Ha most a

$$10H + 1 = \underbrace{1010\dots101}_{H}$$

páratlan alternáló számhoz adjuk hozzá a teljes maradékrendszer $2T_r$ elemeit, akkor alternáló páratlan számokból álló teljes maradékrendszert kapunk $\pmod{n}$.

Ebből következik, hogy ha $(10; n) = 1$, akkor n-nek van alternáló többszöröse, az erősebb állításra a későbbiekben lesz szükség.

d) Hátra van még az az eset, amikor n osztható 2-vel vagy 5-tel, de nem osztható 20-szal. Ha $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1$, ahol $(n_1; 10) = 1$, akkor vagy $\alpha \le 1$ és $\beta > 0$, vagy pedig $\alpha \ge 1$ és $\beta = 0$. Ha $\alpha \le 1$ és $\beta > 0$, akkor *b*) szerint $5^{\beta-1}$-nek létezik legfeljebb $(\beta - 1)$-jegyű B alternáló többszöröse, amelynek utolsó jegye, 5, páratlan. Így $B_1 = 10B$ β-jegyű alternáló szám és $\alpha \le 1$ miatt $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid B_1$.

Olyan C alternáló számot keresünk, amelyre $D_1 = C \cdot 10^\beta + B_1$ is alternáló és osztható n-nel. Mivel $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid 10^\beta$, azért $2^\alpha \cdot 5^\beta \mid D_1$. Most $(10; n_1) = 1$, tehát *c*) szerint az $x \cdot 10^\beta + B_1 \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának létezik adott paritású alternáló megoldása, így B_1 első jegyének paritásától függően olyan is, amelyre D_1 is alternáló. Miután most $(n_1; 2) = (n_1; 5) = 1$, azért $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n_1 \mid D_1$.

Végül ha $\beta = 0$ és $\alpha \ge 1$, akkor ugyanígy okoskodhatunk. *a*) szerint van olyan α-jegyű A alternáló szám, amelyre $2^\alpha \mid A$, *c*) szerint pedig a $10^\alpha \cdot x + A \equiv 0 \pmod{n_1}$ kongruenciának van adott paritású alternáló megoldása. Ekkor $2^\alpha \mid 10^\alpha$, tehát $2^\alpha \mid 10^\alpha \cdot x + A$, $(2; n_1) = 1$ miatt $n = 2^\alpha \cdot n_1 \mid 10^\alpha \cdot x + A$ és x paritását az A első jegyével ellentétesnek választva $10^\alpha \cdot x + A$ is alternáló szám lesz.

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, a bizonyítást befejeztük.