A múlt havi számunkban közreadtuk a 2003. évi Őszi Ankét totó-kérdéseit. A helyes válasz:

$$\mathrm{X}, \mathrm{X}, 1, \qquad 1, \mathrm{X}, 1, \qquad \mathrm{X}, 1, 2, \qquad 1, 1, 2, \qquad 1, \mathrm{X}.$$

Telitalálatos szelvény nem volt. 12 találatot ért el és könyvjutalmat kapott *Jankó Zsuzsanna* (Szeged, Radnóti M. Gimn. 10. évf.) és *Csóka Endre* egyetemi hallgató, továbbá *Horváth Márton, Hubai Tamás* és *Paulin Dániel* (mindhárman a Fazekas M. Főv. Gyak. Gimnázium 12. évf. tanulói)[1]. Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a totóban szereplő feladatok megoldásához.

1. *Melyik számot jelenti a „harmadfél”?* 1/6 (1); — 1,5 (2); — 2,5 (X).

Megoldás. Harmadfél: a harmadik csak fél, tehát ez csak 2,5. (Ahogyan a másfél értéke 1,5.)

2. *Egy kocka alakú homogén test sűrűsége* $500\ \mathrm{kg/m^3}$*. Ha vízre helyezzük, úgy fog úszni, hogy két lapja vízszintes* (1); — *két éle éppen a vízfelszínre esik, de nincs vízszintes lapja* (2); — *valamilyen más helyzetet foglal el* (X).

Megoldás. A test stabil úszási helyzetét a rendszer (a test és a víz) helyzeti energiájának *minimuma* határozza meg. A kocka térfogatának fele merül bele a vízbe, a tömegközéppontja tehát éppen a vízfelszínre esik. Emiatt a test helyzeti energiája – ha a vízfelszín magasságát tekintjük nullszintnek – a kocka térbeli állásától (oldallapjainak a vízhez viszonyított helyzetétől) függetlenül *mindig nulla.*

A víz helyzeti energiája – ha a kocka vízbe merülő része helyén is víz lenne – ugyancsak független lenne a kocka térbeli helyzetétől, így a *teljes rendszer* helyzeti energiája éppen a kiszorított víz energiájának (-1)-szeresével egyezik meg, vagyis a kiszorított víz tömegközéppontjának a vízfelszíntől mért d távolságával arányos. A kocka tehát olyan helyzetben úszhat stabilan, amelyben a kiszorított víz tömegközéppontja a lehető legmagasabban helyezkedik el.

Amikor a kocka 2 lapja vízszintes, akkor a kiszorított víz négyzet alapú hasáb, és $d = d_1 = \frac{1}{4}a = 0{,}25\,a$ (ahol a a kocka oldalélének hossza). Ennél kisebb energiájú állapot az, amikor a kockának 4 éle vízszintes, és közülük kettő a vízfelszínre esik. Ekkor a kiszorított víz egyenlő oldalú derékszögű háromszög alapú hasáb, és

$$d = d_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\,a \approx 0{,}2357\,a < d_1.$$

De még ennél is kisebb energiájú az az állapot, amelyben a kocka egyik testátlója függőleges, és a vízfelszín síkjában vett metszete szabályos hatszög. Ilyenkor

$$d = d_3 = \frac{13\sqrt{3}}{96}\,a \approx 0{,}2345\,a < d_2.$$

Belátható, hogy a d_1-nek és a d_2-nek megfelelő helyzet kis kitérítésekre instabil, míg $d = d_3$-nál a test energiájának lokális minimuma van, ez az úszási helyzet tehát stabil.

3. *Egy ötjegyű számot nevezzünk* felbonthatatlannak, *ha a szám nem áll elő két háromjegyű szám szorzataként. Legfeljebb hány egymást követő felbonthatatlan szám van?* 99 (1); — 100 (2); — *egyik sem* (X).

Megoldás. Például $10001, 10002, \ldots, 10099$ felbonthatatlanok, hiszen valamennyien $100\cdot100$ és $100\cdot101$ közé esnek. 100 egymást követő ötjegyű szám között viszont mindig van 100-zal osztható, így az nem felbonthatatlan.

4. *Olajjal töltött kémcsőben légbuborékok szállnak föl. Ha elektromosan feltöltött üvegrudat közelítünk hozzá, az a buborékokat taszítja* (1); — *vonzza* (2); — *nem hat rájuk* (X).

Megoldás. Az elektromosan töltött üvegrúd polarizálja az olajat (dielektrikumot), és emiatt (a töltésének előjelétől függetlenül) vonzza azt. Kis mértékben a buborékban levő levegő is polarizálódik, emiatt a levegőre is vonzóerőt fejt ki az üvegrúd, ennek nagysága azonban az olajra ható erőhöz képest elhanyagolható. Az üvegrúd felé irányuló vízszintes (pontosabban fogalmazva: vízszintes komponenssel is rendelkező) elektromos erőtér hatása a gravitációhoz hasonló, eredményeképpen a buborékok „felszállnak”, vagyis eltávolodnak az üvegrúdtól, mintha az taszítaná őket.

5. *Tudjuk, hogy* $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{19}{99}$*. Mennyi* $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ *értéke?* 1 (1); — $\frac{101}{99}$ (2); — $\frac{139}{99}$ (X).

Megoldás. Legyen $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$, ekkor

$$\frac{19}{99} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}.$$

[1] A 2. és a 12. kérdésnek az Őszi Ankéton ismertetett vázlatos megoldása hibás volt. A résztvevők elnézését kérjük.

Mivel $a = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $b = \frac{1}{2}(y-z+x)$, $c = \frac{1}{2}(z-x+y)$, azért

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{x-y+z}{2x} + \frac{y-z+x}{2y} + \frac{z-x+y}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y-z}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{z-x}{2y} + \frac{1}{2} - \frac{x-y}{2z} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(y-z)yz + (z-x)zx + (x-y)xy}{xyz} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{99} = \frac{139}{99}.$$

6. *Egy függőlegesen tartott rézcsőben erős rúdmágnes esik úgy, hogy nem érintkezik a cső falával. Ha megmérjük a cső súlyát, az a mágnes nélküli esethez képest nagyobb* (1); — *kisebb* (2); — *ugyanakkora* (X) *lesz.*

Megoldás. A mágnes az örvényáramok fékező hatása miatt (az indítást követő nagyon rövid időt leszámítva) egyenletesen mozog, impulzusa tehát nem változik. A rézcsőből és a mágnesből álló rendszer összimpulzusa időben állandó, a rájuk ható külső erők (a két testre ható nehézségi erő és a mérleg által kifejtett erő) eredője nulla kell legyen. A mérleg tehát a cső és a mágnes együttes „súlyát" mutatja, még akkor is, ha a mágnes nem ér hozzá közvetlenül a rézcsőhöz.

Ugyanerre a következtetésre jutunk, ha a mágnesre ható (a súlyával megegyező nagyságú, felfelé irányuló) fékezőerő lefelé mutató ellenerejét hozzáadjuk a (mágnes nélküli) cső súlyához.

7. *Milyen számjegy áll a tízesek helyiértékén abban a legkisebb természetes számban, amely előáll* 9 *egymást követő pozitív egész szám összegeként, és előáll* 10 *egymást követő pozitív egész szám összegeként* 0 (1); — 2 (2); — 3 (X).

Megoldás. $x + (x+1) + \ldots + (x+8) = y + (y+1) + \ldots + (y+9)$, $9x + 36 = 10y + 45$, $0 < 9(x-1) = 10y$, ezért x legkisebb értéke 11, a szám 1**3**5.

8. *Ha Földünk izotermikusnak tekinthető légkörében el tudnánk különíteni egy* $1\ \mathrm{m}^2$ *alapterületű, a légkör „végéig" érő függőleges oszlopot, vajon mi lenne nagyobb: a gáz belső energiája* (1); — *a gáz gravitációs helyzeti energiája* (2); — *esetleg éppen egyformák lennének* (X).

Megoldás. Ha a kérdéses oszlop tömegét m-mel, tömegközéppontjának magasságát pedig H-val jelöljük, akkor a gáz gravitációs helyzeti energiája $E_1 = mgH$, belső energiája pedig

$$E_2 = \frac{5}{2}\frac{mRT}{M},$$

ahol M a levegő móltömege, T pedig a hőmérséklete. A kétféle energia akkor egyezne meg, ha $H = 5RT/(2Mg)$ teljesülne, pl. $T = 300$ K-en $H \approx 20$ km lenne. A légkör sűrűsége a magassággal gyors (exponenciális) ütemben csökken (kb. 5 km-enként feleződne, ha a hőmérséklet állandó lenne). Innen sejthető (és integrálszámítással bizonyítható), hogy a kérdéses légoszlop tömegközéppontja 20 km-nél alacsonyabban van, következésképpen a belső energia nagyobb, mint a (tengerszinthez viszonyított) gravitációs helyzeti energia.

9. *Egy szabályos tetraéder két kitérő élének távolsága* 6 cm. *Hány* cm^3 *a tetraéder térfogata?* 36 (1); — 72 (2); — 144 (X).

Megoldás. Foglaljuk be a tetraédert egy kockába úgy, hogy a tetraéder mindegyik éle egy-egy lapnak átlója. A kocka éle 6 cm, a tetraéder térfogata pedig 6^3-nál a négy „sarok" össztérfogatával, azaz $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6^3$-nal kisebb, tehát $72\ \mathrm{cm}^3$.

10. *Egy hengeres lábosban fele magasságig víz van, a víz tetején a középponttól* 1/2 *sugárnyi távolságban egy pingponglabda úszik. Megváltozik-e ez a távolság, és ha igen, hogyan, ha a lábost a szimmetriatengelye körül egyenletes forgásba hozzuk? A labda lecsúszik a forgásparaboloid alakú „lejtőn"* (1); — *a centrifugális erő „kirepíti" a labdát* (2); — *nem változik a labda és a tengely távolsága, hiszen a labda melletti víz sem csúszik le, és nem is repül „kifelé"* (X).

Megoldás. A pingponglabda a forgástengely felé fog közeledni, de ennek oka *nem* az, hogy a labda „lecsúszik" a ferde vízfelszínen (hiszen a víz legfelső rétegei sem csúsznak le)! A jelenség a forgó koordinátarendszerben észlelhető centrifugális erő inhomogenitásával (helyfüggésével) magyarázható. (Lásd még az 1990. évi Eötvös-verseny 1. feladatának megoldását a KöMaL 1991. évi 2. számában!)

11. *Legyenek a, b, c, d, e és f különböző egészek. Mekkora*

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-f)^2 + (f-a)^2$$

legkisebb értéke? 18 (1); — 20 (2); — 30 (X).

Megoldás. A hat különböző szám közül a legnagyobb és a legkisebb különbsége legalább 5. Ezért az $|a-b|, |b-c|, \ldots, |f-a|$ különbségek közül néhány egymás utáninak az összege legalább 5, és a többi különbség összege is legalább 5: a legkisebb számtól eljutva a legnagyobbig az előjeles különbségek összeadódnak, akárcsak a körbejárás másik ágán. Így, a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint a kérdéses összeg legalább $16{,}\dot{6}$, azaz 17. Azonban az összeg páros, ezért legalább 18. Ez meg is valósul, pl. 0, 1, 3, 5, 4, 2 esetén.

12. *Bizonyos elképzelések szerint a Planck-állandó nem igazán állandó, hanem az idő múltával nagyon kis mértékben növekszik. Ha ez igaz, és rendkívül pontosan megmérjük (viszonylag lassú) elektronok anyaghullámainak elhajlását egy kristályrácson, majd egy év múlva – minden kísérleti körülményt változatlanul tartva – megismételjük a mérést, mit várhatunk: a nulladrendű és az elsőrendű elhajlási maximum szöge nagyobb lesz* (1); — *kisebb lesz* (2); — *ugyanakkora marad* (X), *mint amekkora a korábbi mérésben volt.*

Megoldás. Az elektronhullámok elhajlási szögét (φ) a Planck-állandón (h) kívül a részecskék sebessége (v), az elektronok tömege (m) és a kristály rácsállandója (d) határozza meg: $\varphi \approx \sin\varphi = h/(mvd)$. Látszólag φ h-val arányosan növekszik, a helyzet azonban nem ilyen egyszerű! Az atomok mérete és az atomok közötti távolságok maguk is függnek a Planck-állandótól: $d \sim h^2/(ke^2m)$ (ahol ke^2 elemi töltések Coulomb-vonzására jellemző állandó, „$\sim$" pedig az arányosságot jelenti). Ezek szerint $\varphi \sim ke^2/(hv)$, ami mutatja, hogy a φ szög h-val fordított arányban csökken, – feltéve, hogy v változatlan. De vajon tényleg az?

A kísérleti körülmények változatlanul tartása annyit jelent, hogy az elektronok sebessége (m/s egységekben kifejezve) változatlan marad. Mivel a méter és a másodperc egységét úgy választották meg, hogy a fénysebesség (c) m/s-ban kifejezett nagysága egy bizonyos (rögzített) számérték legyen, ha az elektronok sebessége m/s-ban kifejezve változatlan, akkor c-hez viszonyított aránya sem változhat meg: $v \sim c$, a sebesség tehát h-tól független állandó.

Mindent összevetve azt állíthatjuk, hogy az elhajlás szöge arányos a $ke^2/(hc)$ dimenziótlan mennyiséggel (az ún. finomszerkezeti állandóval), tehát h esetleges növekedtével csökkenne.

13. *Legyen n pozitív egész. Definiáljuk az $n \to n'$ leképezést a következő módon: ha p prím, akkor $p' = 1$, és $(ab)' = a'b + b'a$, ahol a és b természetes számok. Hány olyan kétjegyű szám van, amelyre $n' = n$?* 1 (1); — 2 (2); — *egyik sem* (X).

Megoldás. Ha $n = p_1p_2\ldots p_r$, ahol p_i prím, akkor $n' = n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r}\right)$. Így $n = n'$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r} = 1$, aminek az a feltétele, hogy $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = p$ és $r = p$; azaz $n = p^p$, ahol p prímszám. Az egyetlen ilyen kétjegyű szám a 27.

13+1. *Egy R sugarú, homogén tömegeloszlású kisbolygó színaranyból van. Felszíne fölött h magasságban g_1 a nehézségi gyorsulás, a felszín alatt h mélységben pedig g_2. Melyik érték a nagyobb?* $g_1 > g_2$ (1); — $g_1 < g_2$ (2); — *h/R értékétől függ, és az aranymetszés arányszáma a határeset* (X).

Megoldás. A kisbolygó felszíne fölött $h = xR$ magasságban a nehézségi gyorsulás $1/(x+1)^2$ arányban csökken, a felszín alatt xR mélységben pedig a felszíni érték $(1-x)$-szerese. Amennyiben $\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - x$, azaz $x^2 + x - 1 = 0$, a két nehézségi gyorsulás megegyezik. A fenti egyenlet (számunkra érdekes) megoldása: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, és ez éppen az aranymetszés híres arányszáma.