A feladat megoldásában természetes számon pozitív egész számot értünk. Szükségünk lesz a

$$2^a + 1 = 3^b \tag{2}$$

illetve a

$$2^a - 1 = 3^b \tag{3}$$

egyenletek egész megoldásaira. (2)-ben csak $b \geq 0$ lehet, mivel a bal oldal értéke legalább 1. Emiatt 3^b értéke egész szám, így 2^a is egész, azaz $a \geq O$. Az $a = 0$ mellett nem kapunk b-re egész értéket, az $a = 1$, $b = 1$ megoldás. Ha $a > 1$, akkor $3^b - 1$ osztható 4-gyel, ami csak úgy lehet, ha b páros. (2)-nek a

$$(3^{b/2} - 1)\ (3^{b/2} + 1) = 2^a$$

alakjából látható, hogy a bal oldalon álló két tényező mindegyike 2 pozitív egész kitevőjű hatványa, különbségük pedig 2. Ez csak $3^{b/2} - 1 = 2,\ \ 3^{b/2} + 1 = 4$ esetben lehetséges, amiből $a = 3,\ b = 2$ adódik.

A (3) egyenletben $a \geq 1$, különben a bal oldal nem lenne pozitív. Az $a = 1,\ \ b = 0$ megoldás. Ha $a \geq 2$, akkor $b \geq 1$, azaz a bal oldal 3-mal osztható, ami csak úgy lehet, ha a páros. (3)-nak

$$(2^{a/2} - 1)\ (2^{a/2} + 1) = 3^b$$

alakjából látható, hogy a bal oldalon szereplő két tényező mindegyike 3-hatvány, különbségük pedig 2. Ez viszont csak a $2^{a/2} - 1 = 1,\ \ 2^{a/2} + 1 = 3$ esetben lehetséges, amiből $a = 2,\ \ b = 1$ adódik.

Térjünk most rá a feladat megoldására. Az (1) egyenlet a következő alakban írható:

$$(p^x - 1)\,(p^x + 1) = g^y \cdot r^z.$$

Mivel $p^x - 1$ osztható $(p-1)$-gyel és aszerint, hogy x páros vagy páratlan, $p^x - 1$ vagy $p^x + 1$ osztható $(p+1)$-gyel, $q^y \cdot r^z$ osztható $(p-1)$-gyel és $(p+1)$-gyel is.

A továbbiakban három esetet különböztetünk meg.

1. Ha $p = 2$, akkor $q^y \cdot r^z$ osztható 3-mal, q vagy r tehát 3. Mivel q^y és r^z felcserélhetők, legyen $q = 3$. Ekkor (1) a következő alakot ölti:

$$(2^x - 1)\,(2^x + 1) = 3^y \cdot r^z.$$

A bal oldalon álló tényezők különbsége 2 és páratlanok, tehát relatív prímek. Így közülük az egyik osztható 3-mal, és $2^x - 1 \neq 1$, miatt a másik r-rel. Ezért

vagy $\quad 2^x - 1 = 3^y \quad$ és $\quad 2^x + 1 = r^z,$
vagy $\quad 2^x - 1 = r^2 \quad$ és $\quad 2^x + 1 = 3^y.$

A (3) egyenlet megoldásai alapján az első esetben

$x = 1,\quad y = 0,\quad r = 3,\quad z = 1,$ ami nem megoldás, vagy
$x = 2,\quad y = 1,\quad r = 5,\quad z = 1.$

A második esetben (2) megoldásai alapján

$x = 1,\quad y = 1,\quad r = 1,$ ami nem megoldás, vagy
$x = 3,\quad y = 2,\quad r = 7,\quad z = 1.$

2. Ha $p = 3$, akkor $q^y \cdot r^z$ páros, tehát q és r közül legalább az egyik 2. Legyen $q = 2$. Ekkor (1) a következő alakot ölti:

$$(3^x - 1)\,(3^x + 1) = 2^y \cdot r^z.$$

Ha r a bal oldalon álló tényezőknek közös osztója, akkor $r = 2$. Ez esetben

$$2^{y+z} + 1 = 3^{2x}.$$

A (2) megoldása szerint, mivel $2x = 1$ nem lehet, $2x = 2$, $y + z = 3$. Ebből $x = 1$ és $y = 1$, $z = 2$, vagy $y = 2$, $z = 1$. Ha $r \neq 2$, akkor r-rel a bal oldalon álló kifejezésnek csak egyik tényezője osztható, ezért

vagy $\quad 3^x - 1 = 2^t \quad$ és $\quad 3^x + 1 = 2^{y-t} \cdot r^z,$
vagy $\quad 3^x + 1 = 2^s \quad$ és $\quad 3^x - 1 = 2^{y-s} \cdot r^z.$

(t és s y-nál kisebb pozitív egész számok.) Az első esetben (2) alapján a

$$t = 3, \quad x = 2, \quad y = 4, \quad r = 5, \quad z = 1$$

megoldást kapjuk. A $t = 1$, $x = 1$ lehetőség most kizárt, mert belőle $r = 2$ adódna. A második esetben (3) megoldásai szerint vagy $s = 1$, $x = 0$, vagy $s = 2$, $x = 1$, amiből $r = 2$ következik, ezért itt ezek sem jöhetnek számításba.

3. Végül ha $p > 3$, akkor mivel p prímszám, $p+1$ és $p-1$ páros számok és egyikük 3-mal is osztható. Ezért $g^y \cdot r^z$ osztható 2-vel és 3-mal is, vagyis q és r közül az egyik 2, a másik 3, legyen $q = 2$, $r = 3$.

Ekkor (1) a következő alakot ölti:

$$(p^x - 1)(p^x + 1) = 2^y \cdot 3^z.$$

Nem lehet osztható a bal oldal mindkét tényezője sem 3-mal, sem 4-gyel, mivel szomszédos páros számok. Ezért (és $p > 3$ miatt) két eset lehetséges:

vagy $p^x - 1 = 2 \cdot 3^z$ és $p^x + 1 = 2^{y-1}$,
vagy $p^x - 1 = 2^{y-1}$ és $p^x + 1 = 2 \cdot 3^z$.

Az első esetben a két egyenletet egymásból kivonva és 2-vel egyszerűsítve a (3) típusú

$$2^{y-2} - 1 = 3^z$$

egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen természetes számokból álló megoldása $y = 4$, $z = 1$ és ezért $p = 7$, $x = 1$.

A második esetben az előbbihez hasonló módon a (2) típusú

$$2^{y-2} + 1 = 3^z$$

egyenlet adódik, amelyből két megoldást kapunk:

$$y = 3, \quad z = 1, \quad \text{amelyből} \quad p = 5, \quad x = 1,$$

és

$$y = 5, \quad z = 2, \quad \text{amelyből} \quad p = 17, \quad x = 1.$$

Azon kívül, hogy q^y-t és r^z-t még minden esetben felcserélhetjük egymással, több lehetőség nincs.

A keresett számok tehát a következők:

p	x	q	y	r	z
2	2	3	1	5	1
2	2	5	1	3	1
2	3	3	2	7	1
2	3	7	1	3	2
3	1	2	1	2	2
3	1	2	2	2	1
3	2	2	4	5	1

p	x	q	y	r	z
3	2	5	1	2	4
7	1	2	4	3	1
7	1	3	1	2	4
5	1	2	3	3	1
5	1	3	1	2	3
17	1	2	5	3	2
17	1	3	2	2	5

Megjegyzés. Ha a természetes számok közé a nullát is bevesszük, még a következő megoldásokat kapjuk:

p	x	q	y	r	z
2	1	3	1	tetszőleges	0
2	1	tetszőleges	0	3	1
3	1	2	3	tetszőleges	0
3	1	tetszőleges	0	2	2

Ármós Lajos (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)