

1. Tekintsük azokat a forgáshengereket, amelyekben az alapkör sugarának és a henger magasságának az összege 10 cm. E forgáshengerek közül melyiknek a palástfelszíne a legnagyobb? Mennyi ez esetben a henger térfogata?

2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = 3a, \\ x + (a+1)y = 2. \end{cases}$$

3. Egy húrtrapéz területe $144\sqrt{3}$ cm², a száruk hossza megegyezik a trapéz köré írt kör sugarával. Számítsuk ki a trapéz magasságát, átlóját és középvonalának hosszát. Kiszámítható-e a trapéz párhuzamos oldalainak hossza?

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a)
$$\sqrt{4 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 9} = 3 - 2^{x+1};$$

b)
$$\sqrt{2 \cos 2x - 4 \cos x + 3} = 1 - 2 \cos x.$$

5. S_n, S_k, S_{n+k} egy számtani sorozat első n, k , illetve $n+k$ tagjának az összege. Igazoljuk, hogy

$$(n+k)(S_n - S_k) = (n-k) \cdot S_{n+k}.$$

6. Tekintsük a $[-4; 4]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto f(x)$ függvényt, ahol

$$f(x) = \frac{|x-3| + |x+1|}{|x+3| + |x-1|}.$$

Számítsuk ki a függvény maximumát és minimumát, valamint azokat az x értékeket, ahol ezeket felveszi a függvény.

7. Igazoljuk, hogy ha α, β egy háromszög két szöge és

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta,$$

akkor a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú.

8. Tapasztaljuk, hogy

$$44 - 8 = 6^2, \quad 4444 - 88 = 66^2, \quad 444444 - 888 = 666^2.$$

Igazoljuk, hogy

$$\underbrace{44\dots4}_{2n \text{ jegyű}} - \underbrace{88\dots8}_n = \underbrace{66\dots6}_n^2.$$