1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right);\qquad b)\quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right);$$

$$c)\quad \cos\left(3x-\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right);\qquad d)\quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}-3x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Megoldás. Ismeretes, hogy $\sin\alpha=\sin\beta$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha=\beta+2k\pi$ vagy $\alpha=\pi-\beta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

A $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ és a $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$ azonosságok alkalmazásával adódik, hogy az egyenletek ekvivalensek, így

$$3x-\frac{\pi}{3}=2x+\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad\text{vagy}\quad 3x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-2x+2k\pi,$$

azaz

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\text{vagy}\quad x=\frac{7\pi}{30}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

2. *Oldjuk meg a*

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4a+4}=2$$

egyenletet a valós számok halmazán, ahol a valós paraméter.

Megoldás. Tegyük fel, hogy van megoldás. Ekkor $\left(\sqrt{x-4a+4}\right)^2=\left(2-\sqrt{x}\right)^2$, amiből $x=a^2$, azaz, ha van megoldás, akkor $x=a^2$ a megoldás. Ez akkor megoldás, ha kielégíti az egyenletet, azaz

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-4a+4}=2,\qquad |a|+|a-2|=2.$$

Ha $a<0$, akkor $-a+2-a=2$, $a=0$, tehát nem megoldás; ha $0\le a\le 2$, akkor $a+2-a=2$, tehát minden ilyen a-ra megoldás; ha $a>2$, akkor $a+a-2=2$, $a=2$, tehát nem megoldás.

Az egyenletnek $0\le a\le 2$ esetén van megoldása és a megoldás $x=a^2$.

3. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasság CD. Az ACD, illetve BCD háromszögekbe írható kör sugara $\varrho_1=3$, illetve $\varrho_2=4$. Számítsuk ki az ABC háromszögbe írható kör sugarát.*

Megoldás. Az ACD, a CBD és az ABC derékszögű háromszögek hasonlók, így a megfelelő szakaszok aránya egyenlő, így van olyan k arányossági tényező, hogy $AC=k\cdot 3$, $BC=k\cdot 4$ és $AB=k\cdot\varrho$, ahol ϱ az ABC háromszögbe írható kör sugara. A Pitagorasz-tétel alkalmazásával

$$k^2\cdot\varrho^2=9k^2+16k^2,\qquad \varrho^2=25,\qquad \varrho=5.$$

Az ABC háromszög beírható körének sugara 5. (Ilyen háromszög létezik, $AC=15$, $BC=20$, $AB=25$.)

4. *Az ABC háromszög B, illetve C csúcspontján áthaladó súlyvonal egyenlete $3x+5y=10$, illetve $3x-2y=3$. A háromszög egyik csúcspontja $(-3;1)$. Számítsuk ki a másik két csúcspont koordinátáit.*

Megoldás. Mivel a $(-3;1)$ pont nincs rajta a megadott súlyvonalakon (nem elégíti ki az egyenletüket), azért $A(-3;1)$. A két súlyvonal metszéspontja a háromszög súlypontja: $S\left(\frac{5}{3};1\right)$. Legyen a BC oldal felezőpontja A_1. Mivel $\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{SA_1}$ és $\overrightarrow{AS}=\left(\frac{14}{3};0\right)$, azért

$$\overrightarrow{SA_1}=\left(\frac{7}{3};0\right)\quad\text{és}\quad \overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA_1}=\left(\frac{5}{3};1\right)+\left(\frac{7}{3};0\right)=(4;1),$$

tehát $A_1(4;1)$.

A $3x+5y=10$ egyenletű s_B súlyvonal egy tetszőleges pontja $x=5t$, $y=2-3t$, $t\in\mathbb{R}$, a $3x-2y=3$ egyenletű s_C súlyvonal egy tetszőleges pontja $x=1+2v$, $y=3v$, $v\in\mathbb{R}$. Mivel A_1 a BC oldal felezőpontja, azért $5t+1+2v=8$ és $2-3t+3v=2$, ahonnan $t=v=1$. Így $B(5;-1)$ és $C(3;3)$.

(A feladat természetesen más módokon is megoldható.)

5. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \lg^2(5-x)+2\lg^2(x+1)=3\big(\lg(5-x)\big)\big(\lg(x+1)\big),$$

$$b)\quad 3^{2x+1}+3^{2-2\sqrt{x}}=4\cdot 3^{1+x-\sqrt{x}};\qquad c)\quad 2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+4\cos^4 x=1.$$

Megoldás. *a)* Legyen $\lg(5-x)=a$, $\lg(x+1)=b$. Ekkor $a^2+2b^2=3ab$, ahonnan $a=b$ vagy $a=2b$, azaz $\lg(5-x)=\lg(x+1)$ vagy $\lg(5-x)=2\lg(x+1)$ és $-1<x<5$. Az első egyenletből $5-x=x+1$, $x_1=2$ és ez valóban megoldás. A második egyenletből $\lg(5-x)=2\lg(x+1)$, $5-x=(x+1)^2$, ahonnan $x_2=1$, $x_3=-4$. Az $x_2=1$ megoldás, az x_3 nem.

b) Legyen $3^x=a$, $3^{-\sqrt{x}}=b$. Azonos átalakításokkal és rendezéssel $a^2-4ab+3b^2=0$, $a=b$ vagy $a=3b$. Így $3^x=3^{-\sqrt{x}}$ vagy $3^x=3^{1-\sqrt{x}}$, azaz $x=-\sqrt{x}$ vagy $x=1-\sqrt{x}$, $x_1=0$; $\sqrt{x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\sqrt{x}\geq 0)$, $x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Az egyenlet megoldása x_1 és x_2.

c) A triviális $1=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2$ azonosságból $1=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$. Ezt alkalmazva a $\sin^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+3\cos^4 x=0$ egyenlethez jutunk. Ha $\cos^2 x=0$, akkor $\sin^2 x=1$, így nincs megoldás, csak olyan x lehet megoldás, amelyre $\cos^2 x\neq 0$. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $(\cos^4 x)$-szel. Ekkor a $\operatorname{tg}^4 x-4\operatorname{tg}^2 x+3=0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $\operatorname{tg}^2 x=1$ vagy $\operatorname{tg}^2 x=3$, azaz $\operatorname{tg} x=1$ vagy $\operatorname{tg} x=-1$ vagy $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ vagy $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$. A megoldások:

$$x_{1,k}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};\quad x_{2,n}=\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z};\quad x_{3,m}=-\frac{\pi}{3}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

6. *Mely n egész számokra lesz a*

$$\frac{18nx+36x+12n+6n^2}{3n^2x+15nx+18x+6n+5n^2+n^3}$$

kifejezés értéke egész szám, ha x tetszőleges egész számot jelenthet?

Megoldás. A törtkifejezés számlálóját és nevezőjét alakítsuk szorzattá:

$$\frac{6(n+2)(3x+n)}{(n+2)(n+3)(3x+n)}=\frac{6}{n+3},$$

ahol $n\neq -2$ és n nem lehet 3 többszöröse ($n\neq -3$, $n\neq -3x$, $x\in\mathbb{Z}$.)

A kifejezés értéke akkor egész, ha $n+3$ osztója 6-nak és $n\neq -2$, $n\neq -3x$.

Ha $n+3=-1$, $n+3=2$ vagy $n+3=-2$, akkor $n=-4$, $n=-1$ vagy $n=-5$ és ezek a megoldások.

Ha $n+3$ értéke 1, 3, -3, 6 vagy -6, akkor $n=-2$ vagy 3-nak többszöröse, így ilyen n nem felel meg a feltételeknek. $n=-1$ esetén a kifejezés értéke 3, $n=-4$ esetén -6, míg $n=-5$ esetén -3.

7. *Az*

$$x^2+(2p-1)x+\frac{3}{2}p^2-5p+\frac{1}{4}=0$$

egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a valós p paraméter mely értékeinél a legkisebb, illetve a legnagyobb? Mennyi ez a legkisebb, illetve legnagyobb érték?

Megoldás. Az egyenletnek akkor valósak a gyökei, ha diszkriminánsa nem negatív:

$$D=(2p-1)^2-4\left(\frac{3}{2}p^2-5p+\frac{1}{4}\right)=-2p^2+16p=2\big(16-(p-4)^2\big).$$

$D\geq 0$, ha $(p-4)^2\leq 16$, $-4\leq p-4\leq 4$, $0\leq p\leq 8$. Most

$$f(p)=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2p-1)^2-2\left(\frac{3}{2}p^2-5p+\frac{1}{4}\right)=(p+3)^2-\frac{17}{2}.$$

Az f függvény a $0\leq p\leq 8$ értékekre értelmezett és $f(p)=(p+3)^2-\dfrac{17}{2}$.

Mivel $3\leq p+3\leq 11$, $9\leq (p+3)^2\leq 121$, így

$$\frac{1}{2}\leq f(p)\leq 112{,}5.$$

A függvény legkisebb értéke $\dfrac{1}{2}$, amit a $p=0$ helyen vesz fel, a legnagyobb értéke 112,5, amit a $p=8$ helyen vesz fel. (Az f függvény az adódó intervallumon szigorúan monoton növekvő.)

8. *Az ABC háromszög AB oldalán levő K, a BC oldalán levő L pontokra $3AK=KB$, illetve $BL=LC$. Az AL és CK szakaszok metszéspontja Q.*

a) *Hányadrésze az ABC háromszög területének az AQB, illetve a BQC háromszög területe?*

b) *Milyen arányban osztja a Q pont az AL, illetve a CK szakaszt?*

Megoldás. Kössük össze a Q pontot B-vel. Jelölje t_1 az AQK háromszög, t_2 a QBL háromszög, t a QCA háromszög, T pedig az ABC háromszög területét. A feltételből következik, hogy a KQB háromszög területe $3t_1$, a QLC háromszög területe t_2, valamint

$$\frac{T}{2}=4t_1+t_2,\quad \frac{3}{4}T=3t_1+2t_2\quad \text{és}\quad \frac{T}{4}=t+t_1.$$

Így

$$8t_1 + 2t_2 = 4t_1 + \frac{8}{3}t_2, \quad \text{amiből} \quad t_2 = 6t_1, \quad T = 20t_1, \quad T = \frac{10}{3}t_2.$$

a)

$$\frac{t_{AQB}}{t_{ABC}} = \frac{4t_1}{20t_1} = \frac{1}{5} \quad \text{és} \quad \frac{t_{BQC}}{t_{ABC}} = \frac{2t_2}{\frac{10}{3}t_2} = \frac{3}{5},$$

a t_{AQB} terület az ABC háromszög területének $\frac{1}{5}$ része, a t_{BQC} terület az ABC háromszög területének $\frac{3}{5}$ része. Adódik, hogy $t = 4t_1$.

b)

$$\frac{AQ}{QL} = \frac{t}{t_2} = \frac{4t_1}{6t_1} = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad \frac{CQ}{QK} = \frac{t}{t_1} = \frac{4t_1}{t_1} = 4.$$