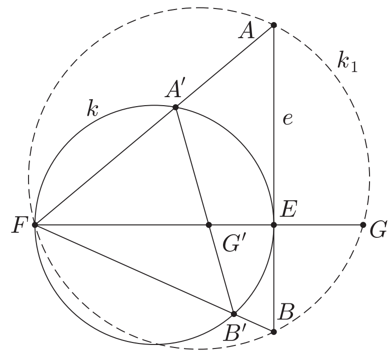
**1. feladat.** *Az $EF$ átmérőjű $k$ kört az $e$ egyenes az $E$ pontban érinti. Tekintsük az $e$ egyenes összes olyan $A$, $B$ pontpárját, melyre az $AB$ szakasz az $E$ pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen pontpár esetén legyen $A'$, illetve $B'$ a $k$ kör metszéspontja az $AF$, illetve $BF$ szakasszal. Igazoljuk, hogy az $A'B'$ szakaszok egy ponton mennek keresztül.*

**I. megoldás.** Legyen az $ABF$ háromszög köré írt $k_1$ kör és az $EF$ egyenes $F$-től különböző metszéspontja $G$. Az $E$ pontnak $k_1$ körre vonatkozó hatványa $AE \cdot EB = FE \cdot EG$ állandó, ezért a $G$ pont helyzete nem függ az $A$, $B$ pontpár megválasztásától.



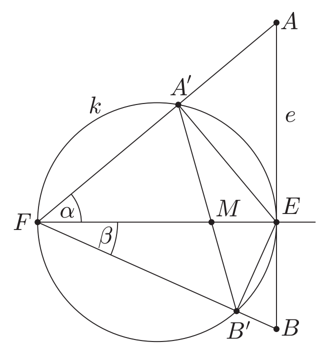

Tekintsük most azt az inverziót, amelynek alapköre az $F$ középpontú, $EF$ sugarú kör. Az $e$ egyenes inverze a $k$ kör, az $A$ és $B$ pontok inverze az $A'$, illetve a $B'$ pont. A $k_1$ kör inverze az $A'B'$ egyenes; ezen belül is a $G$-t tartalmazó körív képe az $A'B'$ szakasz. Az $A'B'$ szakasz tehát mindig átmegy a $G$ pont inverzén, $G'$-n, mely, mint azt láttuk, független az $A$ és $B$ pontok választásától. $\square$

*Megjegyzések.* 1. A fenti megoldás az inverzió tulajdonságaira épít, amely nem feltétlenül tananyag a középiskolában (lásd hátsó belső borítóoldalt). Ugyancsak inverziót használ megoldásában *Balogh László* és *Maga Péter.*

2. A fenti megoldásból könnyen látható, hogy ha $EF = 1$, akkor

$$FG' = \frac{1}{FG} = \frac{1}{1 + EG} = \frac{1}{1 + AE \cdot EB}.$$

A továbbiakban megadunk két, szokásosabb megoldást is.




**II. megoldás.** Legyen most $EF$ és $A'B'$ metszéspontja $M$. Megmutatjuk, hogy $M$ minden $A$, $B$ pár esetén ugyanaz a pont; másképpen, az $FM$ hossza állandó. Az $FM$ hosszát az $FA'B'$ háromszög és $FA'EB'$ négyszög területének arányával fogjuk kifejezni:

$$\frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}}.$$

Válasszuk az $EF$ szakasz hosszát egységnek, legyen $AFE\sphericalangle = \alpha$ és $BFE\sphericalangle = \beta$. Az érintő tulajdonság és a Thalész-tétel szerint az $FEA$, $FEB$, illetve $FA'E$ és $FB'E$ háromszögek derékszögűek, így $AE = \tan\alpha$, $BE = \tan\beta$, $FA' = \cos\alpha$, $FB' = \cos\beta$, $A'E = \sin\alpha$ és $B'E = \sin\beta$. A keresett területek tehát:

$$t_{FA'B'} = \frac{1}{2} FA' \cdot FB' \sin(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$t_{FA'EB'} = t_{FA'E} + t_{FEB'} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{4} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Végül

$$FM = \frac{FM}{EF} = \frac{t_{FA'B'}}{t_{FA'EB'}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{1}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{1+EA\cdot EB}$$

Az $FM$ szakasz hossza tehát állandó. $\square$

**III. megoldásvázlat** (Kis Gergely megoldása). Válasszuk $k$ középpontját az origónak, sugarát egységnyinek, legyenek továbbá az $A$ és $B$ pontok koordinátái rendre $(1;a)$, ill. $(1;b)$. Az $AF$ és $BF$ egyenesek, ill. a $k$ kör egyenletei rendre

$$\frac{ax}{2} + \frac{a}{2} = y$$

$$\frac{bx}{2} + \frac{b}{2} = y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

A megfelelő egyenletpárok megoldásából a metszéspontokra

$$A' = \left(\frac{8}{a^2+4} - 1; \frac{4a}{a^2+4}\right) \quad \text{és} \quad B' = \left(\frac{8}{b^2+4} - 1; \frac{4b}{b^2+4}\right)$$

adódik. Az $A'B'$ egyenes egyenlete innen

$$\frac{4+ab}{2(a+b)}\left(x + 1 - \frac{8}{a^2+4}\right) + \frac{4a}{a^2+4} = y.$$

Az $A'B'$ egyenes $x$ tengellyel való metszéspontjának $x$ koordinátája a fenti egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel

$$x_0 = \frac{4+ab}{4-ab}.$$

Ez a mennyiség állandó, hiszen $ab$ állandó. Ez azt jelenti, hogy az $A'B'$ egyenesek mindegyike átmegy az $(x_0; 0)$ ponton. $\square$

**2. feladat.** *Egy $G$ gráf $k$-színezése a $G$ csúcsainak megszínezése $k$ lehetséges szín felhasználásával úgy, hogy $G$ bármely élének végpontjai különböző színűek legyenek. Azt mondjuk, hogy $G$ egyértelműen $k$-színezhető, ha egyrészt $G$-nek létezik $k$-színezése, másrészt nem léteznek $G$-nek olyan $u$ és $v$ csúcsai, melyek $G$ valamely $k$-színezésében azonos színűek, míg $G$ egy másik $k$-színezésében egymástól különböző színt kapnak.*

*Bizonyítsuk be, hogy ha az $n$ pontú $G$ gráf egyértelműen 3-színezhető és $n \geq 3$, akkor $G$-nek legalább $2n-3$ éle van.*

**Megoldás.** Rögzítsük $G$ egy 3-színezését, melyben az egyes színekre színezett csúcsok száma (azaz a színosztályok mérete) $n_1$, $n_2$, illetve $n_3$. Világos, hogy $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Tegyük fel, hogy két színosztály (mondjuk a piros és a zöld) nem feszít $G$-ben összefüggő gráfot, azaz a piros és zöld csúcsok között futó élek alkotta részgráfnak legalább két komponense van. Amennyiben e komponensek valamelyikén a színeket felcseréljük (vagyis ezen a komponensen belül a korábban zöld csúcsok pirosak lesznek, a pirosak pedig zöldek), úgy továbbra is igaz marad, hogy $G$ bármely élének végpontjai különböző színűek. A cserével tehát $G$ egy olyan 3-színezéséhez jutunk, melynek színosztályai másképpen osztják három csoportra $G$ csúcsait, mint az eredeti színezés színosztályai. Ezért az új 3-színezésben vagy két, korábban azonos színű pont különböző színt kapott, vagy két, korábban különböző színű pont azonos színű lett, esetleg mindkét változásra sor kerülhetett. Ez ellentmond annak, hogy $G$ egyértelműen színezhető 3 színnel, vagyis $G$ bármely két színosztálya összefüggő gráfot feszít.

Ismert, hogy egy összefügő gráf élszáma legfeljebb 1-gyel kevesebb, mint pontjainak száma, ezért az első két színosztály legalább $n_1 + n_2 - 1$, a második és harmadik színosztály legalább $n_2 + n_3 - 1$, míg az első és harmadik színosztály legalább $n_1 + n_3 - 1$ különböző élt tartalmaz. Az említett élek egymástól is különböznek, ezért $G$ élszámára az $(n_1 + n_2 - 1) + (n_2 + n_3 - 1) + (n_3 + n_1 - 1) = 2n - 3$ alsó becslést kapjuk. $\square$

*Megjegyzések.* 1. Többen próbálták a feladatot teljes indukcióval megoldani: az állítás 3-pontú gráfokra világos, tegyük fel, hogy a legfeljebb $(n-1)$-pontú gráfokra már bizonyítottuk a becslést. Ha az $n$-pontú, egyértelműen 3-színezhető $G$ gráfnak minden csúcsa legalább 4-edfokú, akkor élszáma legalább $2n$, így az állítás igaz. Ha van $G$-nek másodfokú csúcsa, akkor annak törlésével (mint az könnyen látható) egy egyértelműen 3-színezhető gráf keletkezik, melyre igaz az indukciós feltevés: legalább $2(n-1) - 3 = 2n - 5$ éle van, ezért $G$ élszáma nem kevesebb, mint $2n - 5 + 2 = 2n - 3$. Az elintézetlen eset az, amikor $G$-ben a minimális fokszám 3. Sajnos, ha $G$ egy harmadfokú $v$ csúcsát elhagyjuk, a maradék $G - v$ gráf nem lesz feltétlenül egyértelműen 3-színezhető: elképzelhető ugyanis $G - v$-nek olyan 3-színezése, melyben $v$ szomszédai különböző színeket kapnak. Ha ezt követően pl. összehúzzuk $v$ két azonos színű szomszédját, akkor a kapott gráf már egyértelműen 3-színezhető, azonban csupán 3-mal kevesebb éle van, mint $G$-nek. Az indukciós bizonyításhoz pedig legalább 4-gyel kevesebb élre volna szükség.

A bizottság nem ismer a fenti gondolatmenetet teljes indukciós bizonyítássá kiegészítő érvelést.

2. Többen igazolták, hogy a feladatban adott korlát elérhető. Világos, hogy a 3-pontú teljes gráf egyértelműen 3-színezhető, és $(2n-3)$ éle van. Az is könnyen látszik, hogy ha egy egyértelműen 3-színezhető $G$ gráfhoz hozzáveszünk egy új pontot, melyet $G$ két különböző színű pontjával kötünk össze, akkor újabb egyértelműen 3-színezhető gráfot kapunk, melyre a becslés pontos lesz, ha már $G$-re is az volt.

3. A feladat megoldása értelemszerű módosításokkal kiterjeszthető egyértelműen $k$-színezhető gráfok élszámának becslésére is, azaz megmutatható, hogy tetszőleges egyértelműen $k$-színezhető gráfnak legalább $(k-1)(n-k)+\binom{k}{2}$ éle van. A 2. megjegyzés is kiterjeszthető: a $k$-pontú teljes gráf egyértelműen $k$-színezhető, és egy egyértelműen $k$-színezhető gráfhoz új pontot hozzávéve és $k-1$ különböző színű ponttal összekötve ismét egyértelműen $k$-színezhető gráfot kapunk.

4. Akkor is alkalmazható a módszerünk, ha nem az *egyértelműen* $k$-színezhető gráfok élszámát akarjuk megbecsülni, hanem csupán felső korlátunk van $G$ $k$-színezéseinek számára. A megoldás gondolatmenetével felső becslést kaphatunk két színosztály által feszített komponensek számára, innen pedig a két komponens által feszített élek száma alulról becsülhető.

**3. feladat.** *Jelölje $(a;b)$ az $a$ és $b$ egész számok legnagyobb közös osztóját. Bizonyítsuk be, hogy véges sok kivételtől eltekintve minden pozitív egész $n$ számra teljesül a*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i;j)>4n^2$$

*egyenlőtlenség.*

**I. megoldás.** Vizsgáljuk meg, hogy egy rögzített $d$ szám hányszor lép fel $(i;j)$-ként a feladatbeli összegben! Világos, hogy ha $(i;j)=d$, akkor $\frac{i}{d}$ és $\frac{j}{d}$ relatív prímek, továbbá mindkettő az $\left[1;\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right]$ intervallumba esik, ahol $\lfloor n\rfloor$ az $n$ alsó egészrészét jelöli.

Másfelől, ha $i',j'\in\left[1;\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right]$ relatív prímek, akkor $i:=i'\cdot d$, ill. $j:=j'\cdot d$ esetén $(i;j)=d$ és $i,j\in[1;n]$. A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiséget $f(n)$-nel jelölve, a fenti gondolatmenet formálisan az alábbi összeg átrendezése:

$$f(n):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i;j)=\sum_{d=1}^{n}\sum_{\substack{(i;j)=d,\\ 1\le i\le n,\\ 1\le j\le n}}d=\sum_{d=1}^{n}\sum_{\substack{(i;j)=1,\\ 1\le i\le \frac{n}{d},\\ 1\le j\le \frac{n}{d}}}d=\sum_{d=1}^{n}d\cdot g\left(\frac{n}{d}\right),\tag{1}$$

ahol $g(x)$ az 1 és $x$ közé eső számokból alkotható relatív prím számpárok száma. A továbbiakban $g(x)$ értékét fogjuk megbecsülni, pontosabban igazoljuk, hogy

$$g(x)\ge\frac{x^2}{100}.\tag{2}$$

Mivel az $(1;1)$ számpár megfelelő, ezért $x\le 10$ esetén (2) triviálisan teljesül. A becslés úgy adódik, hogy az összes számpárok számából minden $d$-re kivonjuk azon számpárok számát, melyeknek $d$ közös osztója. Azaz,

$$g(x)\ge\lfloor x\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor^2-\ldots>\left(\frac{9x}{10}\right)^2-\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}-\ldots>$$

$$>x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\ldots\right)\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ldots\right)\right)\ge x^2\left(\frac{81}{100}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)>\frac{x^2}{100}.$$

A becslést (1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$f(n)=\sum_{d=1}^{n}d\cdot g\left(\frac{n}{d}\right)\ge\sum_{d=1}^{n}d\cdot\frac{n^2}{100\cdot d^2}=\frac{n^2}{100}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\tag{3}$$

Ismert, hogy a harmonikus sor divergens, ezért valamely $N$-re $\sum_{d=1}^{N} \frac{1}{d} > 400$ teljesül (például $N = 2^{800}$ megfelel), így $n \geq N$-re (3) alapján

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i;j) = f(n) \geq \frac{n^2}{100} \cdot 400 = 4n^2,$$

amint azt bizonyítanunk kellett. $\square$

*Megjegyzések.* 1. A bizonyításból látható, hogy a feladatbeli becslés jobb oldalán álló 4-es szorzó tetszőleges konstanssal helyettesíthető azon az áron, hogy megnő az a legnagyobb egész, melyre a feladatbeli egyenlőtlenség még nem teljesül.

2. Mélyebb számelméleti ismereteket felhasználva megmutatható, hogy a megoldásban szereplő $g(x)$ függvény aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2$, ahonnan a feladatban szereplő $f(n)$ összeg értéke aszimptotikusan $\frac{6}{\pi^2}x^2 \log x$-nek adódik.

3. A legtöbb megoldó a fentinél kevésbé elemi, a prímek reciprokösszegének divergenciájára építő megoldást talált. Az alábbiakban vázoljuk ezt a gondolatmenetet.

**II. megoldás.** Az $(i;j)$ legnagyobb közös osztót az $i$, $j$ számok közös prímosztóinak összegével becsüljük. Legyenek $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ mindazon prímek, melyek az $i$ és $j$ számokat egyaránt osztják. Mivel bármely szóban forgó prím legalább 2, ezért

$$(i;j) \geq p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \geq p_1 + p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k \geq$$
$$\geq p_1 + p_2 + p_3 \cdot \ldots \cdot p_k \geq \ldots \geq p_1 + p_2 + \ldots + p_k \tag{4}$$

teljesül. Jól ismert, hogy a prímek reciprokösszege $\infty$-hez tart, így létezik olyan $N$ szám, melyre az 1 és $N$ közti prímek reciprokösszege nagyobb, mint 6. Ha tehát $n \geq N$, akkor (4) alapján az I. megoldásban definiált $f(n)$-t az alábbi módon becsülhetjük:

$$f(n) \geq \sum_{p \text{ prím}} \sum_{p|(i;j)} p = \sum_{p \text{ prím}} p \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor^2 \geq \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} p \left( \frac{n}{p} - 1 \right)^2 =$$

$$= \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \left( \frac{n^2}{p} - 2n + p \right) > -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \geq -2n^2 + n^2 \cdot \sum_{\substack{p \text{ prím} \\ p \leq N}} \frac{1}{p} \geq$$

$$\geq -2n^2 + 6n^2 = 4n^2. \quad \square$$