

I. rész

1. Határozzuk meg azon négyzet csúcspontjainak a koordinátáit, amelynek három csúcsa illeszkedik az $x^2 - 6x - 5y + 4 = 0$ egyenletű parabolára, és átlói párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.

a) Mekkora a négyzetbe írt kör területe?

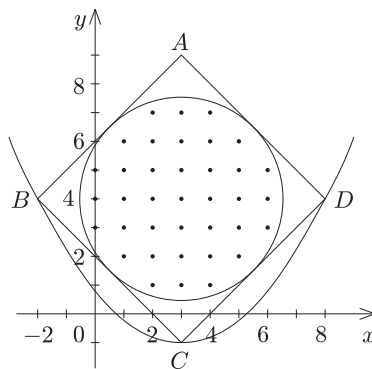
b) Hány rácspontja van a zárt körlapnak?

(11 pont)

Megoldás. Az $x^2 - 6x - 5y + 4 = 0$ parabola egyenletét alakítsuk a következőképpen:

$$\frac{(x-3)^2}{5} = y + 1.$$

Csúcspontja leolvasható: $C(3; -1)$. A négyzet oldalegyenese 45° -os szöveget zár be az x tengellyel, és átmegy C -n, ezért egyenlete $y = x - 4$. Második metszéspontja a parabolával $D(8; 4)$, tehát $B(-2; 4)$ és $A(3; 9)$. A négyzet átlója 10 egység, így oldala $5\sqrt{2}$, ami a keresett kör átmérője. A négyzetbe írt kör területe $T = \frac{25\pi}{2}$. A kör egyenlete $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{2}$.



Az $y = 4$ és az $x = 3$ egyeneseken a körben 13 rácspont van, egy negyedkörben még 6 újabb rácspont, tehát összesen 37 rácspont van a zárt körlapon. (Tulajdonképpen azt kell leszámolni, hányféleképpen adhat két egész szám négyzetösszege 12,5-nél kisebbet.)

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 - x^2 - x^4 = 4^{\sin^2 x}. \quad (12 \text{ pont})$$

Megoldás. Mivel $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, azért a jobb oldal értékkészlete $1 \leq 4^{\sin^2 x} \leq 4$. A bal oldal értéke legfeljebb 1 lehet, és az is csak akkor, ha $x = 0$. Ez az egyetlen megoldása az egyenletnek.

3. Az alábbi táblázat a fogyasztói árindex alakulását mutatja néhány országban 1995–1999 között:

| Ország | változás az előző évhez képest, % | | | | |
|---------------------|-----------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
| Ausztria | 2,3 | 1,5 | 1,3 | 1 | 0,6 |
| Franciaország | 1,7 | 2 | 1,2 | 0,8 | 0,6 |
| Lengyelország | 27,8 | 19,9 | 14,8 | 11,6 | 7,3 |
| Magyarország | 28,2 | 23,6 | 18,3 | 14,3 | 10 |
| Nagy-Britannia | 3,4 | 2,4 | 3,2 | 3,4 | 1,6 |
| Németország | 1,8 | 1,4 | 1,9 | 1 | 0,6 |

a) Értelmezzük, mit jelent Ausztriánál az utolsó két oszlopban található 1 és 0,6 szám.

b) Ha valaki 1994-ben 34 000 forintot az ágynemű közé rejtett, hány forintnak felel meg a vásárlóereje 1999-ben?

c) Nagymami 200 000 forintot akar diplomaajándékként az unokájának adni 1999-ben, amikor végez. Mennyi pénzt tett a sikeres felvételi vizsga hírére 1994-ben abba a bankba, amelyik – mint utóbb kiderült – pontosan a fogyasztói árindexszel megegyező kamatot adott 1994 és 1999 között? (14 pont)

Megoldás. a) Azt jelenti, hogy a fogyasztói árak átlagosan az előző évnek 1,01-; illetve 1,006-szeresei lettek.

b) Az 1994-es forint 1995-ben már csak az eredeti összeg $\frac{1}{1 + \frac{28,2}{100}}$ -szorosát érte, és hasonló gondolatmenettel kiszámítható, hogy az 1994-ben elrejtett 34 000 Ft vásárlóértéke 1999-ben

$$34\,000 \cdot \frac{1}{1 + \frac{28,2}{100}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{23,6}{100}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{18,3}{100}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{14,3}{100}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10}{100}} = 14\,426$$

forint 1994-es vásárlóértékének felelt meg.

c) Nagymami ezresre kerekítve 85 000 forintot tett 1994-ben a bankba, számítás az előző módon.

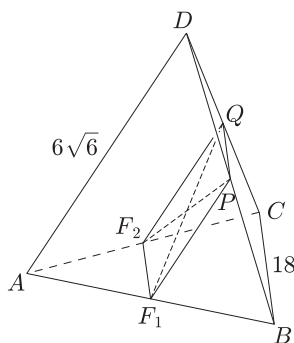
4. Az ABC szabályos háromszög alapú, D csúcsú gúla alapélei 18 cm, oldalélei $6\sqrt{6}$ cm hosszúak. Fektessünk az AD éllel párhuzamos síkot az AB és AC élek felezőpontjain át.

a) Számítsuk ki a síkmetszet területét.

b) Mekkora szöveget zár be a metsző sík az alapsíkkal?

(14 pont)

Megoldás. Az AD éllel párhuzamos és az AB és AC élek felezőpontjain átmenő sík az ABD és ACD síkokat az AD -vel párhuzamos középvonalakban metszi. A metszetenégszög paralelogramma, melynek átlói a szimmetria miatt egyenlők, ezért ez téglalap.



a) A téglalap területe $t = 9 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$.

b) A síkmetszet párhuzamos az AD éllel, ezért az alapsíkkal bezárt szögük egyenlő. Mivel D vetülete az ABC szabályos háromszög súlypontja, azért

$$\cos \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

II. rész

5. Egy 16 fős csoportban a kémia átlag 3,81 volt (két tizedesre kerekítve). Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?

b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?

c) Hányféleképpen lehetett pontosan 11 darab négyes?

d) Igaz-e, hogy ha a módusz 4, akkor a medián is 4?

(16 pont)

Megoldás. Az osztályzatok összegére (x) teljesül, hogy $3,805 \cdot 16 \leq x < 3,815 \cdot 16$. Egyetlen egész esik a kívánt intervallumba, a 61.

a) Legfeljebb hatan, mert hét kettesnél a maradék 9 osztályzat összege 47 kellene legyen, ami lehetetlen. Ha hat kettés, egy négyes és kilenc ötös volt, akkor a feladat minden feltétele teljesül.

b) Nem. Lehetett például 3 db hármas és 13 db négyes.

c) A 11 négyes mellett nem lehetett a maradék 5 dolgozat mindegyike hármas vagy annál gyengébb, mert az legfeljebb 15 pont a szükséges 17 helyett, ezért biztosan volt ötös. Ha egy darab ötös volt, akkor 4 darab hármas kellett legyen, míg két ötös esetén egy hármas és két kettés osztályzattal jön ki a 17 pont.

d) Igaz. Ha a módusz 4, akkor abból legalább öt darab van, különben minden osztályzattól 4 db lenne, de annak az átlaga 3,5. Ha a medián nem 4, akkor a nagyság szerinti nyolcadik–kilencedik helyen csak hármas és négyes vagy négyes és ötös állhat. Ez utóbbi eset nem lehet, hiszen akkor az utolsó 8 hely mindegyikén ötös áll, de akkor ez a módusz; az első eset pedig azért lehetetlen, mert akkor az utolsó 8 szám összege legfeljebb $5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 35$, így az első 8 osztályzat összege legalább 26 kellene legyen, ami még $8 \cdot 3$ -nál is több.

6. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara, körül írt körének sugara és a kerülete egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a két hegyesszög tangensének összege 4. (16 pont)

Megoldás. Legyen a derékszögű háromszög beírt körének sugara r , körül írt körének sugara R , befogói a és b , átfogója c . Mivel külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, $r = \frac{a+b-c}{2}$, és $R = \frac{c}{2}$ a Thalész-tétel miatt. Felhasználjuk a mértani sorozat tulajdonságát és a Pitagorasz-tételt:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)(a+b+c), \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Rendezve az $a^2 - 4ab + b^2 = 0$ egyenlethez jutunk. Osszunk b^2 -tel. Ekkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ -re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek két gyöke $\operatorname{tg} \alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Ez a két szám egymás reciproka, ezért az egyik az egyik hegyesszögnek, másik a másik hegyesszögnek a tangensét adja, és a kettő összege valóban 4.

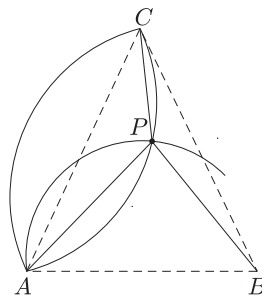
7. Egy víztorony (P) távolságát kell az 1 : 250 000 arányú térkép segítségével az A falutól meghatározni. Ehhez két falu (B és C) A -tól való távolságát ismerjük a térképen: $AB = 17,2$ cm, $AC = 20,0$ cm. Lemértük továbbá, hogy

$$\angle APB = 83^\circ, \quad \angle APC = 130^\circ \quad \text{és} \quad \angle BAC = 65^\circ.$$

Mekkora az AP távolság a valóságban?

(16 pont)

Megoldás. Az adatok 3 értékes jegyet tartalmaznak. Jelöljük a PAB szöveget φ -vel. Ennek segítségével kifejezhetők az $ABPC$ konkáv négyszög szögei. Felírva két szinusz-tételt az ABP és ACP háromszögekre, majd a két egyenletet egymással elosztva egy trigonometrikus egyenletet kapunk φ -re. Ennek csak a hegyesszögű megoldása értelmes a példában. Ezután AP szakasz kiszámolható. $AP = 13,46$ cm. Figyelembe kell azonban venni a térkép méretarányát, így a valóságban 33,65 km a távolság.



8. Határozzuk meg azt a harmadfokú függvényt, amelyik a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) Belülről érinti az $x^2 + y = 4$ görbét az $x = 0$ pontban.

b) A két görbe metszi egymást az $x = 2$ pontban.

c) A két görbe közé zárt terület a $[0; 2]$ intervallumban $\frac{4}{3}$.

Írjuk le a harmadfokú függvény menetét.

(16 pont)

Megoldás. A harmadfokú függvényt keressük $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakban:

Érinti az $x^2 + y = 4$ görbét az $x = 0$ pontban, ez két dolgot jelent:

– Illeszkedik rá a $(0; 4)$ pont, tehát $d = 4$ és

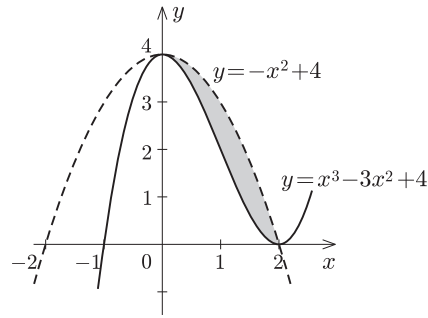
– A $(0; 4)$ pontban közös a két görbe érintője, tehát a keresett függvény deriváltja a nulla helyen nulla, ahonnan $c = 0$.

A két görbe metszi egymást az $x = 2$ pontban, ezért $8a + 4b + 4 = 0$.

A két görbe közé zárt terület a $[0; 2]$ intervallumban $\frac{4}{3}$. Mivel a harmadfokú görbe belülről érinti a másodfokút, ezt a területet az alábbi integrál számítja ki:

$$\int_0^2 (-x^2 + 4) dx - \int_0^2 (ax^3 + bx^2 + 4) dx = \frac{4}{3},$$

ahonnan $3a + 2b = -3$.



A keresett függvény tehát

$$x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2.$$

A függvény menete leolvasható az ábráról.

9. Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson valamelyik kocsira, nem törődik azzal, hogy a társai melyik kocsiba szálltak.

- Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3-3 tagja szállt?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe nem szállt fel senki a társaság tagjai közül?
- Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel a társaságból? (16 pont)

Megoldás. Az, hogy valaki az első, második, harmadik kocsiba szállt, felfogható úgy, hogy kiválasztotta az 1, 2, 3 elemek valamelyikét. Az összes esetek száma ezért 3^9 .

a) Annak a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3-3 tagja szállt, olyan sorozat valószínűségének felel meg, amelyben mindhárom elem 3-szor szerepel:

$$p = \frac{9!}{\frac{3!^3}{3^9}} \approx 0,085.$$

b) Ez a valószínűség úgy tekinthető, hogy a sorozat minden eleme csak előre meghatározott kettő lehet. Vigyázni kell azonban arra, hogy ne számoljuk többször azokat az eseteket, amikor mindenki ugyanarra a kocsira szállt.

$$p = \frac{\binom{3}{2}2^9 - 3}{3^9} = 0,07788.$$

c) Ha a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel, akkor azok a rossz esetek, amikor minden kocsiba legalább ketten szálltak, vagyis ha az emberek eloszlása 2-2-5, vagy 2-3-4, vagy 3-3-3. A keresett valószínűség ezért

$$p = 1 - \frac{3 \frac{9!}{2!2!5!} + 3! \frac{9!}{2!3!4!} + \frac{9!}{3!^3}}{3^9} = 0,4153.$$