II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok Első (iskolai) forduló

1. A táblára felírtuk a 0-tól 2003-ig terjedő egész számokat (tehát összesen 2004 db számot). Mekkora a táblán levő számjegyek összege?

2. Határozzuk meg azokat a valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\lg (x-y) + \lg 2 = \frac{1}{2}(\lg x - \lg y),$$
$$\lg (x+y) - \lg 3 = \frac{1}{2}(\lg y - \lg x).$$

3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{80}$ nyolcvantagú sorozatban a tagok pozitívak, az első és utolsó tagon kívül minden tag egyenlő két szomszédjának a szorzatával. Az első 40 tag szorzata 8, ugyanennyi mind a 80 tag szorzata is. Írjuk fel a sorozat első 8 tagját.

4. Kivágtuk papírból a 72 cm^2 területű $ABCD$ téglalapot, majd összehajtottuk úgy, hogy a C csúcs éppen az A csúcsot fedje. Az összehajtott papírlap pontosan egy olyan ötszög alakját veszi fel, amelynek a területe a téglalap területének a 68,75%-a. Mekkorák az $ABCD$ téglalap oldalai?

5. Az $ABCD$ paralelogramma AB oldalán úgy jelöljük ki az X és a BC oldalán az Y pontot, hogy $AX = CY$ teljesüljön; az AY és CX egyenesek metszéspontját jelölje P. Bizonyítsuk be, hogy a DP egyenes felezi a paralelogramma D-nél levő szögét.

Második forduló

1. Jelentsen n 1-nél nagyobb egész számot. Képezzük a következő két kifejezést:

$$A = \frac{\sqrt{n+1}}{n} + \frac{\sqrt{n+4}}{n+3} + \frac{\sqrt{n+7}}{n+6} + \frac{\sqrt{n+10}}{n+9} + \frac{\sqrt{n+13}}{n+12},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+5}} + \frac{1}{\sqrt{n+8}} + \frac{1}{\sqrt{n+11}}.$$

Döntsük el, hogy n értékétől függően az $A < B$, $A = B$, $A > B$ kapcsolatok közül melyik állhat fenn.

2. Az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; a beírt kör sugara r, a köré írt köré R. Az A csúcsnál levő szög: $\alpha \geq 90°$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{r}{R} \leq \frac{a \sin \alpha}{a+b+c}.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan p valós paraméter, amelyre az $x^3 + 2px^2 + 2p^2x + p = 0$ egyenletnek három különböző valós gyöke van.

4. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 2AD$ és $BC = 2CD$; ismert továbbá az A-nál levő α szög mértéke és az AC átló d hossza. Fejezzük ki a négyszög területét α-val és d-vel.

Harmadik (döntő) forduló

1. A P pont a hegyesszögű ABC háromszög AB oldalán mozog. A P-n át AC-vel húzott párhuzamos a BC oldalt az X pontban, a P-n át BC-vel húzott párhuzamos pedig AC-t az Y pontban metszi. Adjunk eljárást olyan P pont szerkesztésére, amelyhez tartozó XY szakasz a lehető legrövidebb. Bizonyítsuk be, hogy a legrövidebb XY szakasz merőleges a C csúcsból induló súlyvonalra.

2. Egy háromszög oldalhosszai különböző egész számok; a háromszöghöz található olyan egyenes, amely átmegy a legnagyobb oldal valamelyik harmadoló pontján és felezi a háromszög területét és kerületét is. Határozzuk meg az oldalhoszakat úgy, hogy azok szorzata a lehető legkisebb legyen.

3. Legyen H a 2004-nél nem nagyobb pozitív egészek halmaza: $H = \{1, 2, \ldots, 2004\}$. Jelölje D a H halmaz olyan részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 32-vel osztva 7-et kapunk maradékul, és jelölje S a H halmaz olyan részhalmazainak a számát, amelyekben az elemek összegét 16-tal osztva 14-et kapunk maradékul. Igazoljuk, hogy $S = 2D$.

---

[1] A 2003–2004. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatait és a versenyek helyezetteinek névsorát következő számunkban ismertetjük

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Legyen a, b pozitív valós, n pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lg(a^n) + \binom{n}{1} \lg(a^{n-1}b) + \binom{n}{2} \lg(a^{n-2}b^2) + \cdots + \lg(b^n) = \lg\left((ab)^{n2^{n-1}}\right).$$

2. Álljon a H halmaz véges sok olyan természetes számból, amelyeknek nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy a H-beli számok reciprokainak az összege 3-nál kisebb.

3. Tekintsük egy kör három pontja által meghatározott három diszjunkt körívet. Mindegyik ív felezőpontja körül megrajzoljuk a végpontjain áthaladó kört. Bizonyítsuk be, hogy a kapott három kör egy ponton halad át.

4. Egy földszintes elvarázsolt kastély négyzet alakú, és 2003×2003 egyforma, négyzet alakú szobára oszlik. Oldalszomszédos szobák között ajtók lehetnek. A kapubejárat az északnyugati sarokszobába vezet. A kastélyba belépve bolyongtunk egy darabig, és amikor először visszaértünk az északnyugati sarokszobába, akkor kimentünk a kastélyból. Kiderült, hogy utunk során a délkeleti (és az északnyugati) sarokszoba kivételével mindegyik szobába pontosan százszor léptünk be. Hányszor léptünk be a délkeleti sarokszobába?

5. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ valós számok úgy, hogy $a_0 = a_{n+1} = 0$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan k szám, $0 \leq k \leq n$, hogy
(i) minden $i = 1, \ldots, n-k+1$-re $a_{k+1} + \ldots + a_{k+i} \geq 0$, és
(ii) minden $j = 0, \ldots, k$-ra $a_j + \ldots + a_k \leq 0$.

Második (döntő) forduló

1. Egy háromszög mindhárom oldala legfeljebb $\sqrt{2}$ hosszúságú. Bizonyítsuk be, hogy belefoglalható egy egységnyi élű kockába.

2. Jelölje $p(k)$ a k természetes szám legnagyobb páratlan osztóját. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 1$-re

$$\frac{2}{3}n < \sum_{k=1}^{n} \frac{p(k)}{k} < \frac{2}{3}(n+1).$$

3. Bizonyítsuk be, hogy a c és d egész számokhoz akkor és csak akkor létezik végtelen sok különböző x_n, y_n ($n = 1, 2, \ldots$) egész számpár, amelyre x_n osztója $cy_n + d$-nek és y_n osztója $cx_n + d$-nek, ha c osztója d-nek. (c, d, x_n és y_n nem feltétlenül pozitív számok.)