I. rész

Bevezetés

Ebben a cikkben az ellipszis, parabola és hiperbola elemi geometriai tulajdonságai közül gyűjtünk össze néhány fontosat. Ezekkel a görbékkel a középiskolában először függvények grafikonjaiként találkozunk. Megtanuljuk, hogy az $y = \dfrac{1}{x}$ függvény képe hiperbola, az $y = x^2$ függvényé pedig parabola. Később a koordináta-geometriában azt tanuljuk, hogy az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű görbe ellipszis, az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű görbe pedig hiperbola. Ezeket a görbéket koordinátarendszer nélkül, elemi geometriai eszközökkel is lehet vizsgálni. Így sok érdekes tulajdonságukra adhatunk egyszerű magyarázatot. (Például ki fog derülni, hogy miért használunk parabolaantennát.) Főleg olyan tulajdonságokkal foglalkozunk, melyek minden kúpszeletre teljesülnek. Az egyes görbék speciális jellemzőire nem térünk ki, ezekről részletes leírás található pl. Hajós György: *Bevezetés a geometriába* c. könyvének ([1]) 43. fejezetében.

A kúpszeleteket sokféleképp lehet definiálni. Mi ezt a középiskolában szokásos módon tesszük.

A kúp szeletei

1. definíció.

– Az *ellipszis* azon pontok mértani helye a síkon, melyeknek két rögzített ponttól vett távolságainak összege a két pont távolságánál nagyobb állandó.

– A *parabola* azon pontok mértani helye a síkon, melyek egy adott egyenestől és egy arra nem illeszkedő rögzített ponttól egyenlő távolságra vannak.

– A *hiperbola* azon pontok mértani helye a síkon, melyeknek két rögzített ponttól vett távolságai különbségének abszolút értéke a két pont távolságánál kisebb állandó.

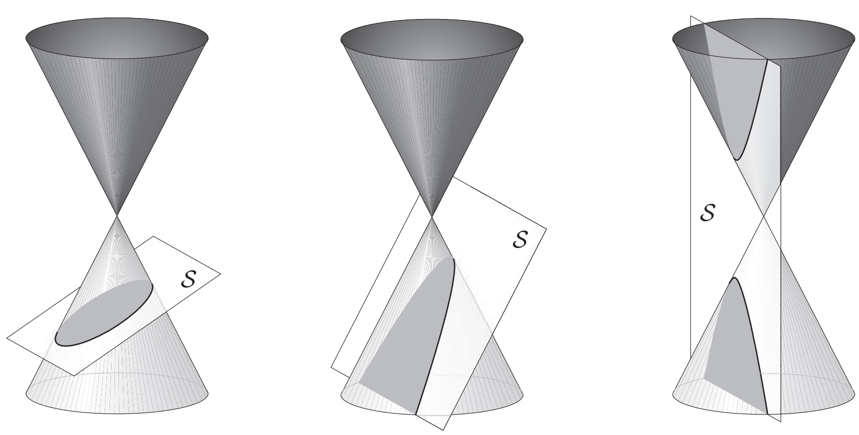
A definícióban szereplő rögzített pontokat az adott görbe *fókuszainak,* a rögzített egyenest a parabola *vezéregyenesének* nevezzük. A továbbiakban a fókusz(oka)t F (és F_2), parabola esetén a vezéregyenest v, ellipszis és hiperbola esetén az állandó értékét pedig $2a$ jelöli. Ezt az értéket ellipszis esetén a *nagytengely,* hiperbola esetén pedig a *valós tengely* hosszának nevezzük.

Megmutatható, hogy ha egy mindkét irányban végtelen egyenes körkúpfelületet elmetszünk bármely olyan $\mathcal{S}$ síkkal, amelyik nem megy át a kúp csúcsán és nem merőleges a kúp tengelyére, akkor a keletkezett metszetgörbe

– *ellipszis,* ha $\mathcal{S}$ a kúp egyetlen alkotójával sem párhuzamos (*1.*(*a*)*. ábra*);

– *parabola,* ha $\mathcal{S}$ pontosan egy alkotóval párhuzamos (*1.*(*b*)*. ábra*);

– *hiperbola,* ha $\mathcal{S}$ két alkotóval párhuzamos (*1.*(*c*)*. ábra*).



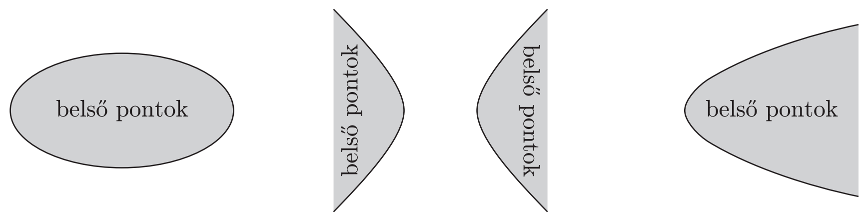
(*a*) (*b*) (*c*)

1. ábra

[1] A T043556 és T043758 számú OTKA pályázatok támogatásával.

Ezt itt nem bizonyítjuk, a bizonyítás megtalálható pl. internetes honlapunkon [3]. Az is belátható, hogy minden kúpszelet előáll mint egy kúpfelület és egy megfelelő sík metszete. Ha azt is megengedjük, hogy a metsző sík merőleges legyen a kúp tengelyére, akkor a köröket is tekinthetjük a kúp szeleteinek. A kör tehát olyan elfajuló ellipszis, amelynél $F \equiv F_2$. Ezért a továbbiakban a *kúpszelet* összefoglaló nevet fogjuk használni az ellipszisre, körre, parabolára és hiperbolára.

A kúpszeletek $\mathcal{S}$ pontjait három osztályba sorolják: A kúpszelet pontjai; $\mathcal{S}$-nek a forgáskúp belsejével alkotott metszete (*2. ábra*), amelyeket a kúpszeletre nézve ***belső pontokak*** nevezünk, valamint $\mathcal{S}$ többi pontja, melyeket a kúpszeletre nézve ***külső pontoknak*** nevezünk.



2. ábra

Ez az elnevezés összhangban van azzal, ahogy a kör belső, illetve külső pontjának fogalmát eddig használtuk. A külső és belső pontok jellemzéséről szól a következő tétel.

2. tétel. *Legyen a kúpszelet a szokásos módon megadva. Ekkor a B pont belső pont, a G pont a görbén lévő pont, a K pont pedig külső pont akkor és csak akkor, ha*

– *ellipszis és kör esetén $BF + BF_2 < 2a$, $GF + GF_2 = 2a$ és $KF + KF_2 > 2a$;*

– *hiperbola esetén $|BF - BF_2| > 2a$, $|GF - GF_2| = 2a$ és $|KF - KF_2| < 2a$;*

– *parabola esetén pedig B v-től való távolsága nagyobb, mint a BF távolság, G v-től való távolsága megegyezik a GF távolsággal és K v-től való távolsága kisebb, mint a KF távolság.*

Bizonyítás. Elegendő bebizonyítani, hogy a belső és a külső pontokra teljesülnek a megfelelő egyenlőtlenségek, hiszen minden pont vagy rajta van a görbén, vagy külső pont, vagy pedig belső pont és a görbén lévő pontokra vonatkozó állítások az 1. definíció átfogalmazásai.

Kör esetén az állítás nyilvánvaló. Ellipszis és hiperbola esetén feltehetjük, hogy $KF \leq KF_2$ és $BF \leq BF_2$. Jelöljük az F-ből induló, B-t, illetve K-t tartalmazó félegyenes és a kúpszelet metszéspontját M-mel. Ekkor az MBF_2 és az MKF_2 (esetleg elfajuló) háromszögekre felírt háromszög-egyenlőtlenségekből ellipszis esetén (*3.(a). ábra*)

$$BF + BF_2 < BF + BM + MF_2 = MF + MF_2 = 2a <$$

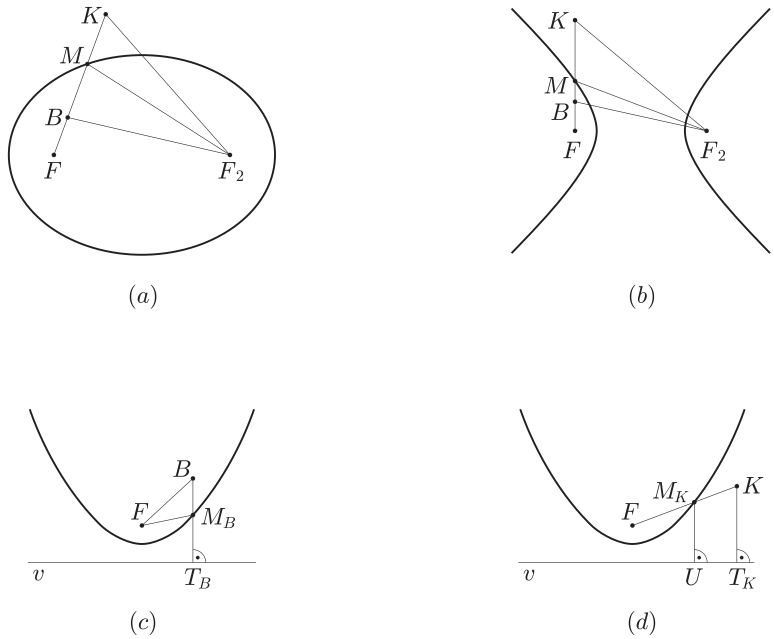
$$< MF + MK + KF_2 = KF + KF_2,$$

hiperbola esetén (*3.(b). ábra*) pedig

$$BF_2 - BF > (MF_2 - MB) - BF = MF_2 - MF = 2a >$$

$$> (KF_2 - KM) - MF = KF_2 - KF$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó állítás.



3. ábra

Parabola esetén legyen M_B a B-ből v-re állított merőleges és a görbe metszéspontja, M_K az F-ből induló K-t tartalmazó félegyenes és a görbe metszéspontja, a B-ből, K-ból és M_K-ból v-re állított merőlegesek talppontjai pedig rendre T_B, T_K és U (*3.(c), (d). ábrák*). Ekkor az M_BBF és az M_KKU (esetleg elfajuló) háromszögekre felírt háromszög-egyenlőtlenségekből kapjuk a bizonyítandó

$$FB < BM_B + M_BF = BM_B + M_BT_B = BT_B \quad \text{és}$$

$$FK = FM_K + M_KK = M_KU + M_KK > KU \geq KT_K$$

egyenlőtlenségeket. □

A kör érintője olyan egyenes, amelynek egy közös pontja van a körrel, összes többi pontja pedig külső pont. Ezért természetes módon adódik a következő definíció:

3. definíció. Az e egyenes a $\mathcal{K}$ kúpszeletet annak E pontjában érinti, ha e átmegy E-n és összes többi pontja $\mathcal{K}$-nak külső pontja.

Következő állításunk szemléletesen nyilvánvaló.

4. tétel. *Legyen a $\mathcal{K}$ kúpszelet tetszőleges pontja E. Ekkor egyértelműen létezik $\mathcal{K}$-t E-ben érintő egyenes.*

Bizonyítás. Állítsuk elő $\mathcal{K}$-t az O csúcsú $\mathcal{F}$ kúp és az $\mathcal{S}$ sík metszeteként. Ekkor minden E-n átmenő $\mathcal{S}$-beli f egyeneshez egyértelműen hozzárendelhetjük azt az OE alkotóra illeszkedő $\mathcal{S}_f$ síkot, mely tartalmazza f-et is és OE-t is. Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{S}_f$ sík pontosan annyi alkotóját tartalmazza $\mathcal{F}$-nek, ahány közös pontja van f-nek és $\mathcal{K}$-nak. Az OE alkotóra illeszkedő síkok közt pontosan egy van, amelyik az OE alkotóban érinti $\mathcal{F}$-et, az összes többi pedig egy-egy O-n átmenő egyenespárban metszi azt. Mivel az érintősíknak nincs pontja $\mathcal{F}$ belsejében, ezért az általa $\mathcal{S}$-ből kimetszett egyenes lesz $\mathcal{K}$ egyértelműen létező E-beli érintője. □

Vezéralakzatok

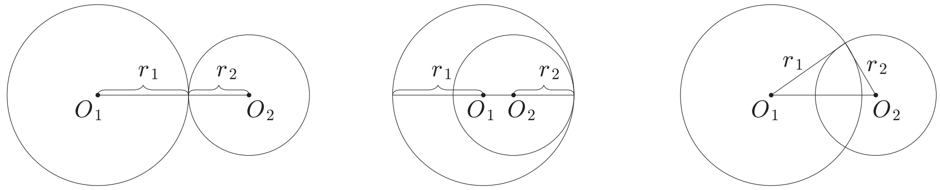
Az ezután következő definíciók és tételek mind síkbeliek, ezért ezt külön nem is fogjuk hangsúlyozni. Kezdjük egy nyilvánvaló állítással.

5. lemma. *Legyenek O_1 és O_2 különböző pontok. Ekkor az O_1 középpontú, r_1 sugarú és az O_2 középpontú, r_2 sugarú körök*

(a) *akkor és csak akkor érintik egymást kívülről, ha $r_1 + r_2 = O_1O_2$;*

(b) *akkor és csak akkor érintik egymást belülről, ha $|r_1 - r_2| = O_1O_2$;*

(c) *akkor és csak akkor metszik egymást két pontban, ha az r_1, r_2 és O_1O_2 szakaszokból háromszög szerkeszthető* (4. ábra).



4. ábra

A kúpszeletek egységes, síkbeli előállításáról szól a következő tétel.

6. tétel. *Adott az F pont és a rajta át nem menő v alakzat, ami vagy kör vagy egyenes. Azon körök középpontjainak halmaza, amelyek átmennek F-en és érintik v-t, kúpszelet. Speciálisan ez a görbe*

– *parabola, ha v egyenes;*

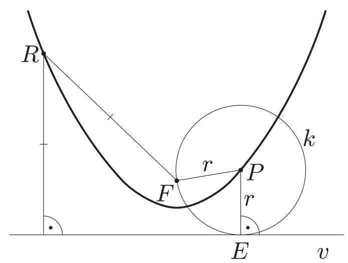
– *kör, ha v kör és F annak a középpontja;*

– *ellipszis, ha v kör és F annak a középpontjától különböző belső pontja;*

– *hiperbola, ha v kör és F annak külső pontja.*

Bizonyítás. Legyen k egy F-en átmenő, v-t az E pontban érintő r sugarú kör, P pedig k középpontja.

Először tegyük fel, hogy v egyenes (*5. ábra*). Mivel a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért PE merőleges v-re. Tehát P és v távolsága megegyezik PE hosszával, és mivel $PE = r = PF$, ezért P rajta van az F fókuszú, v vezéregyenesű parabolán.

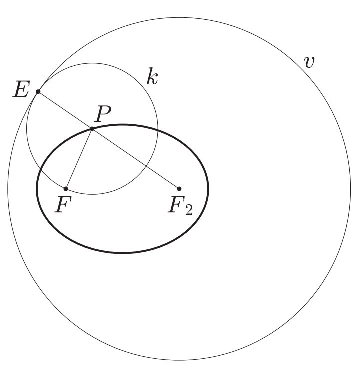


5. ábra

Másrészt ha R ennek a parabolának tetszőleges pontja, akkor R és v távolsága éppen RF, azaz az R-ből v-re állított merőleges talppontja rajta van v-n, tehát az R középpontú RF sugarú körnek v érintője.

Ha v kör, akkor jelöljük a középpontját F_2-vel, sugarának hosszát pedig $2a$-val.

Tegyük most fel, hogy F a v belső pontja (*6. ábra*). Ekkor az 5. lemma (b) része szerint $2a = EF_2 = EP + PF_2 = PF + PF_2$. Vagyis ha $F \equiv F_2$, akkor P rajta van az F középpontú a sugarú körön, ha pedig F és F_2 különbözőek, akkor P rajta van az F és F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszisen.



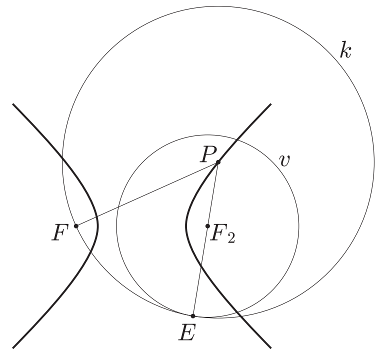
6. ábra

Másrészt ha R ennek a körnek vagy ellipszisnek tetszőleges pontja, akkor $RF + RF_2 = 2a$. Ezért ha az F_2-ből kiinduló F_2R félegyenesre F_2-ből felmért $2a$ hosszú szakasz másik végpontja G, akkor $RG = 2a - PF_2 = RF$, tehát az R középpontú RF sugarú kör G-ben érinti v-t.

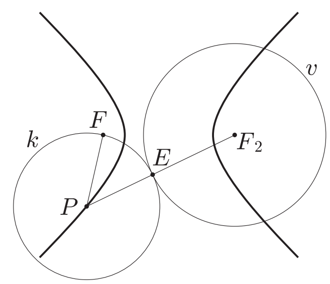
Végül tegyük fel, hogy F a v kör külső pontja. Ekkor k helyzete kétféle lehet: vagy tartalmazza v-t (*7. ábra*), vagy pedig kívülről érinti azt (*8. ábra*). Az 5. lemma (a), illetve (b) része szerint mindkét esetben igaz, hogy

$$|PF - PF_2| = |PE - PF_2| = F_2E = 2a,$$

tehát P rajta van az F és F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbolán.



7. ábra



8. ábra

Másrészt ha R ennek a hiperbolának tetszőleges pontja, akkor vagy $RF = RF_2 + 2a$, vagy pedig $RF_2 = RF + 2a$. Ezért v az első esetben belülről, a második esetben pedig kívülről érinti az R középpontú RF sugarú kört. ☐

Tételünk alapján beszélhetünk az F fókuszú, v vezéralakzatú kúpszeletről. Ha v kör, akkor a továbbiakban középpontját mindig F_2-vel, sugarának hosszát pedig $2a$-val jelöljük. Ellipszis és hiperbola esetén F és F_2 a görbe két fókusza. Az 1. definícióból következően a görbe szimmetrikus az FF_2 szakasz felező merőlegesére. Ha v-t tükrözzük erre az egyenesre, akkor az F középpontú, $2a$ sugarú v_1 kört kapjuk. Ezért az F_2 fókuszú, v_1 vezérkörű kúpszelet megegyezik az F fókuszú, v vezérkörű kúpszelettel. Általában v-t az F_2 fókuszhoz, v_1-et pedig az F fókuszhoz tartozó vezérkörnek nevezik. Ellipszis és hiperbola esetén a további állításaink akkor is igazak, ha F-et F_2-vel és ugyanakkor v-t v_1-gyel helyettesítjük.

A vezéralakzatok segítségével a külső és belső pontokat is egyszerűen jellemezhetjük.

7. tétel. *Legyen $\mathcal{K}$ egy F fókuszú, v vezéralakzatú kúpszelet. Ekkor a P pont $\mathcal{K}$ külső pontja pontosan akkor, ha a P középpontú PF sugarú kör két pontban metszi v-t, belső pontja pedig pontosan akkor, ha a P középpontú PF sugarú körnek és v-nek nincs közös pontja.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{K}$ parabola, akkor v egyenes. A P középpontú PF sugarú kör pontosan akkor metszi két pontban v-t, ha P v-től való távolsága kisebb mint a PF távolság, és pontosan akkor kerüli el v-t, ha P v-től való távolsága nagyobb mint a PF távolság.

Ha $\mathcal{K}$ kör, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $\mathcal{K}$ ellipszis vagy hiperbola, akkor az 5. lemma (c) része szerint a v kör, melynek középpontja F_2, sugara $2a$, és a P középpontú, PF sugarú körök akkor és csak akkor metszik egymást két pontban, ha a $2a, PF$ és PF_2 szakaszokból szerkeszthető háromszög.

Ellipszis esetén $FF_2 < 2a$, ezért $PF + 2a > PF + FF_2 \geq PF_2$ és $PF_2 + 2a > PF_2 + FF_2 \geq PF$ mindig teljesül. Tehát két metszéspont van, ha $PF + PF_2 > 2a$, és nincs metszéspont, ha $PF + PF_2 < 2a$. Ez viszont a 2. tétel szerint éppen a bizonyítandó állítás.

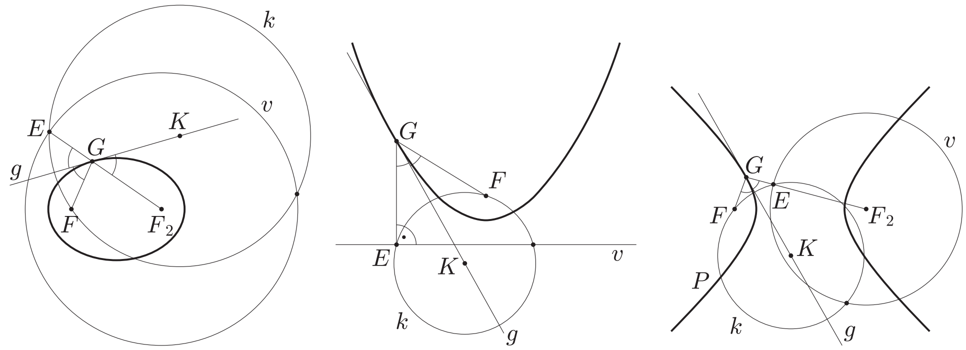
Hiperbola esetén $FF_2 > 2a$, ezért $PF + PF_2 \geq FF_2 > 2a$ mindig fennáll. Tehát két metszéspont van, ha $PF < PF_2 + 2a$ és $PF_2 < PF + 2a$ is teljesül, azaz ha $|PF - PF_2| < 2a$. Ha pedig $|PF - PF_2| > 2a$, akkor nincs metszéspont. Ez ismét a 2. tétel miatt adja a bizonyítandó állítást. ☐

Az egységes tárgyalás kedvéért bevezetünk néhány szokásos elnevezést. A továbbiakban azt mondjuk, hogy *egy kör és egy egyenes merőleges egymásra,* ha az egyenes átmegy a kör középpontján. Ha G a $\mathcal{K}$ kúpszelet tetszőleges pontja, akkor az FG, továbbá a G-ből v-re állított merőleges egyeneseket a G-hez tartozó *vezérsugaraknak* nevezzük.

(Parabola kivételével tehát a másik vezérsugár az F_2G egyenes.) A kúpszelet minden pontjában egyértelműen létezik érintő egyenes a 4. tétel szerint. Az érintő és a vezérsugarak kapcsolatáról szól a következő tétel.

8. tétel. *A $\mathcal{K}$ kúpszelet tetszőleges G pontjában az érintő felezi a G-hez tartozó vezérsugarak szögét.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ az F fókusszal és a v vezéralakzattal adva. A 6. tétel szerint a G középpontú GF sugarú kör érinti v-t. Jelöljük az érintési pontot E-vel és legyen g az $FGE\sphericalangle$ belső szögfelezője. Ekkor parabola és hiperbola esetén g a G-hez tartozó vezérsugarak belső-, ellipszis és kör esetén pedig azok külső szögfelezője (*9. ábra*).



9. ábra

Elegendő megmutatnunk, hogy a g egyenes G-től különböző, tetszőleges K pontja külső pont. Mivel K rajta van az $FGE\sphericalangle$ szögfelezőjén, azért $KF = KE$. Tehát a K középpontú KF sugarú k kör átmegy E-n, ami v-n van. Mivel K különbözik G-től, azért k nem érinti, hanem metszi v-t. Ez viszont a 7. tétel szerint azt jelenti, hogy K külső pont. □

Miután a G-beli érintőről beláttuk, hogy az az $FGE\sphericalangle$ belső szögfelezője, azonnal adódik a következő állítás.

9. következmény. *A kúpszelet fókuszának a kúpszelet tetszőleges érintőjére való tükörképe rajta van a vezéralakzaton.* □

A kúpszelet *tengelyének* nevezzük a fókuszból a vezéralakzatra állított merőlegest. Ha a kúpszeletet a tengelye körül megforgatjuk, akkor a keletkezett felületet *ellipszoidnak, paraboloidnak,* illetve *hiperboloidnak* nevezzük.

A 8. tételt ellipszisre alkalmazva kapjuk, hogy ha az egyik fókuszból sugarakat indítunk, akkor azok a visszaverődési törvény szerint az ellipszoid felületéről visszaverődve a másik fókuszon fognak áthaladni. Ezt a jelenséget figyelhetjük meg pl. a Csodák Palotájában akkor, amikor a megfelelő helyen, az egyik fókuszban halkan elmondott szavainkat a tőlünk távol, de jó helyen, a másik fókuszban álló ismerősünk tökéletesen hallja.

Parabola esetén pedig az következik tételünkből, hogy a parabola tengelyével párhuzamosan érkező sugarak a visszaverődés után áthaladnak a fókuszon. A műholdas adások vételére szolgáló antennák alakja ezért paraboloid, s a jeleket fogó fej a fókuszban helyezkedik el.

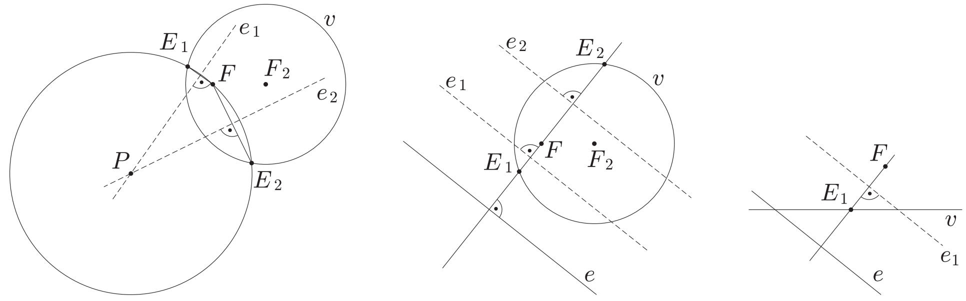
Érintők

A 9. következmény szerint csak olyan egyenes lehet az F fókuszú, v vezéralakzatú kúpszelet érintője, mely merőlegesen felezi a v valamely pontját F-fel összekötő szakaszok egyikét. A következő tétel alapján egyszerűen megszerkeszthetjük egy kúpszelet adott ponton átmenő, illetve adott egyenessel párhuzamos érintőit.

10. tétel. *Legyen $\mathcal{K}$ F fókuszú, v vezéralakzatú kúpszelet, P tetszőleges pont, e pedig tetszőleges egyenes.*

Legyenek a P középpontú, PF sugarú kör és v közös pontjai E_1 és E_2. Ekkor $\mathcal{K}$ P-n átmenő érintői megegyeznek a PE_1 és a PE_2 szakaszok felező merőlegeseivel (10.(a). ábra).

Legyenek az F-en átmenő, e-re merőleges egyenes és v metszéspontjai E_1 és E_2. Ekkor $\mathcal{K}$ e-vel párhuzamos érintői megegyeznek az FE_1 és az FE_2 szakaszok felező merőlegeseivel (10.(b), (c). ábrák, *ellipszis, ill. parabola*).



(a) (b) (c)

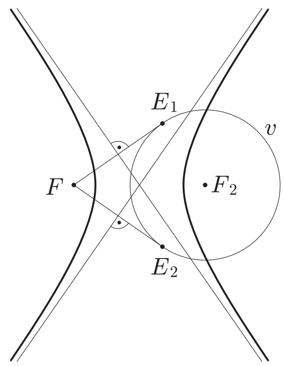
10. ábra

Bizonyítás. A két részállítás bizonyítása szóról-szóra megegyezik.

A 9. következmény miatt más, P-n átmenő, illetve e-vel párhuzamos egyenes nem lehet érintő.

Legyen az FE_i $(i = 1, 2)$ szakasz felezőmerőlegese e_i, az e_i és az E_i-ben v-re állított merőleges egyenes metszéspontja pedig G_i. Ekkor $G_iF = G_iE_i$, tehát a G_i középpontú, G_iF sugarú kör érinti v-t, azaz G_i rajta van $\mathcal{K}$-n. Viszont az e_i egyenes felezi az FG_iE_i szöget, tehát a 8. tétel szerint G_i-ben érinti $\mathcal{K}$-t. □

Tételünk első részéből következik az a szemléletesen nyilvánvalónak tűnő állítás, hogy ha P külső pont, akkor P-n $\mathcal{K}$-nak két érintője megy át. Ez azonban csak egy kis kiegészítéssel igaz. A bizonyítás során megkonstruált G_i érintési pontok ugyanis nem mindig léteznek. Előfordulhat, hogy az E_i-ben v-re állított merőleges párhuzamos FE_i felező merőlegesével. Parabola esetén ez nem lehetséges, ekkor ugyanis FE_i sohasem párhuzamos v-vel. A többi kúpszelet esetén FE_i felezőmerőlegese pontosan akkor párhuzamos az E_i-ben v-re állított merőlegessel, azaz az E_iF_2 egyenessel, ha $FE_iF_2\sphericalangle = 90°$. Ez csak akkor állhat elő, ha F a v-nek külső pontja, azaz $\mathcal{K}$ hiperbola, és az FE_i egyenes érinti v-t. Ekkor az F-ből v-hez húzott két érintőszakasz felezőmerőlegeseit a hiperbola *aszimptotáinak* (*11. ábra*) nevezzük.



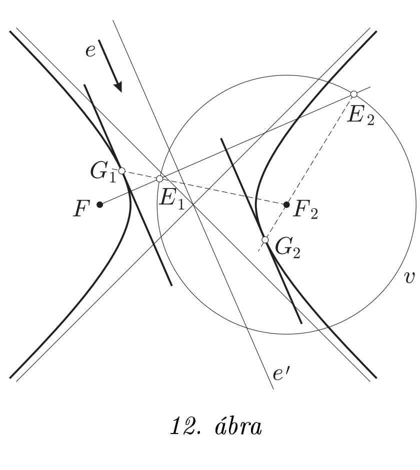
11. ábra

Minden hiperbolának két aszimptotája van. Sok szempontból célszerű ezeket az egyeneseket is a hiperbola érintőinek tekinteni, a továbbiakban mi is ezt tesszük. (Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy a hiperbolát a „végtelen távoli pontjában” érinti az aszimptota. Ez a kijelentés a projektív geometria eszközeivel teljesen precízzé tehető, lásd pl. [1] 44. és 46. fejezet.) Ha tehát a P külső pont a hiperbola egy vagy két aszimptotáján rajta van, akkor P-n az aszimptotákkal együtt megy át két érintő.

Az adott irányú érintőből ellipszis és kör esetén mindig kettő van, hiszen a v kör belsejében lévő F ponton átmenő e-re merőleges egyenes két különböző E_i pontban metszi v-t, s mivel $FE_iF_2\sphericalangle < 90°$, azért a G_i pontok is mindig létrejönnek (*10.*(b)*. ábra*).

Parabola esetén az e-re merőleges egyenesnek és v-nek legfeljebb egy közös pontja van, hiszen v is egyenes (*10.*(c)*. ábra*). A vezéregyenesre merőleges irányt kivéve mindig létezik is pontosan egy, adott irányú érintő, mert ekkor az E és a G pontok mindig létrejönnek. A vezéregyenesre merőleges irányú érintője viszont nincs a parabolának.

Hiperbola esetén az F-en átmenő, e-re merőleges egyenes pontosan akkor metszi két pontban v-t, ha az FF_2 szakasz felezőpontján átmenő, e-vel párhuzamos e' egyenes az aszimptoták által meghatározott négy szögtartomány közül abba a kettőbe metsz bele, melyek nem tartalmazzák a hiperbola pontjait. Ekkor viszont a G_i pontok is létrejönnek, tehát ilyen irányú érintőkből mindig kettő van (*12. ábra*).



12. ábra

Irodalom

[1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 6. kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1979).

[2] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet,* 4. kiadás, Tankönyvkiadó (Budapest, 1976).

[3] Kós Rita: *Kúpszeletek és Dandelin-gömbjeik,* megtalálható a http://www.komal.hu/cikkek/dandelin/dandelin.h.shtml címen.

[4] Rácz János: *Paraboláról, hiperboláról elemi geometriai eszközökkel,* II. rész, KöMaL, 34. évf. (1984), 193–199.

[5] Schopp János: *Kúpszeletek,* Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó (Budapest, 1972).