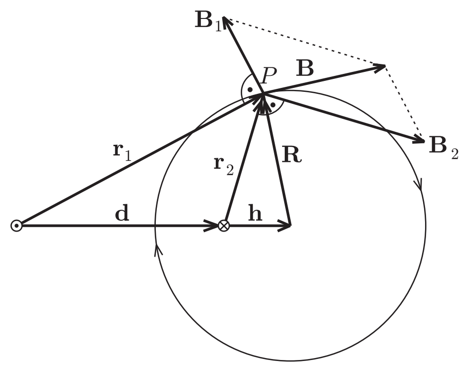
Sokféle út vezet az „üdvösséghez”; a fizikai problémák megoldásához is – számos esetben – többféle gondolatmenettel el lehet jutni. Jó példa erre a 2003. évi Eötvös-verseny 2. feladata, amely lapunk 171. oldalán olvasható megoldása mellett más módszerekkel is kezelhető. Ezen „alternatív” gondolatmenetek közül ismertetünk most kettőt. Mindkettő a versenydolgozatokban bukkant fel (részben vagy teljesen kidolgozva), és a megoldások szépsége (eleganciája) miatt feltétlenül megérdemlik, hogy Olvasóink is megismerkedjenek velük.

I. megoldás (Csóka Endre dolgozata alapján). Bebizonyítjuk, hogy a mágneses indukcióvonalak (az áramvezetők közti távolságot felező ponton áthaladó egyenestől eltekintve) körök.



1. ábra

Tekintsük az áramvezetőkre merőleges síkmetszetet, és használjuk az *1. ábrán* látható vektor-jelöléseket! (A vektorokat a továbbiakban **vastag** betűvel jelöljük, az abszolút értéküket pedig a megfelelő betű vastagítás nélküli párjával; pl. $|\mathbf{B}| = B$.) Az egyes áramvezetők által létrehozott mágneses indukcióvektor tetszőleges helyen, így a P pontban is merőleges a vezetőtől a kérdéses pontba mutató $\mathbf{r}$ vektorra, és a nagysága – a gerjesztési törvény értelmében – a távolsággal fordítottan arányos:

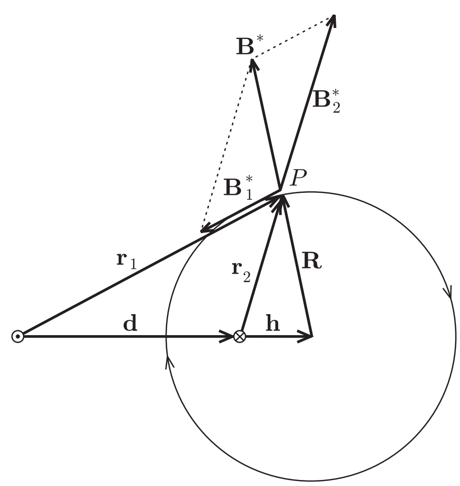
$$\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{r}_1, \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{B}_2 \perp \mathbf{r}_2,$$

továbbá

$$B_1 = \frac{K}{r_1}, \qquad \text{és} \qquad B_2 = \frac{K}{r_2},$$

ahol K egy – számunkra érdektelen – állandó.

Azt szeretnénk belátni, hogy az eredő mágneses indukció, $\mathbf{B}_1$ iránya egy alkalmasan választott kör $\mathbf{R}$ rádiuszvektorára merőleges, tehát a kör érintőjével párhuzamos. Forgassuk el gondolatban 90 fokkal a $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ vektorokat, és velük együtt az eredő $\mathbf{B}$ vektort is; legyenek az elforgatott vektorok $\mathbf{B}_1^*$, $\mathbf{B}_2^*$ és $\mathbf{B}^*$ (*2. ábra*).



2. ábra

A $\mathbf{B}_1^*$ vektor ellentétes irányú az $\mathbf{r}_1 = \mathbf{d} + \mathbf{h} + \mathbf{R}$ vektorral, $\mathbf{B}_2^*$ pedig egyállású az $\mathbf{r}_2 = \mathbf{h} + \mathbf{R}$ vektorral, tehát az eredőjük

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2^* = -\frac{K}{r_1^2}\,(\mathbf{d} + \mathbf{h} + \mathbf{R}) + \frac{K}{r_2^2}\,(\mathbf{h} + \mathbf{R}).$$

Ez a vektor akkor lesz a P pont helyzetétől, vagyis az $\mathbf{R}$ vektor irányától függetlenül $\mathbf{R}$-rel párhuzamos, ha

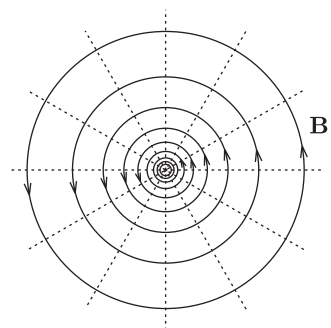
$$\frac{1}{r_1^2}\,(\mathbf{d} + \mathbf{h}) = \frac{1}{r_2^2}\,\mathbf{h},$$

azaz ($\mathbf{d}$ és $\mathbf{h}$ azonos irányát is figyelembe véve) fennáll, hogy

$$\lambda = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{h}{d+h}} = \text{állandó}.$$

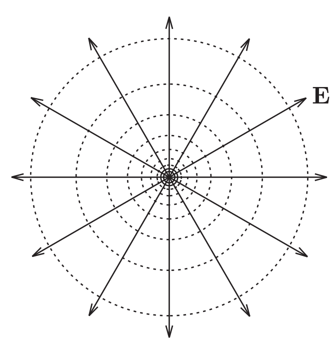
Ez pedig nem más, mint az *Apollóniosz-körök* jellemzője.

II. megoldás (Balogh László sejtése alapján). Tekintsünk először egyetlen hosszú, egyenes áramjárta vezetőt, melynek mágneses erővonalai a vezetőt körülölelő koncentrikus körök (*3. ábra*). Az ábrán az erővonalak sűrűségét a térerősség nagyságával arányosan választottuk meg, és szaggatott vonalakkal bejelöltünk egy – az erővonalakra merőleges – egyenes-sereget is. Ez utóbbiak – az elektrosztatikus mező potenciálfelületeihez hasonlóan – a „síkbeli" magnetosztatikus mező ekvipotenciális vonalaiként is felfoghatók.



3. ábra

Az ábrán látható két vonalsereget figyelve feltűnhet a hasonlóság egy alkalmasan választott elektrosztatikai problémával. Egy hosszú, egyenes, egyenletesen feltöltött szál elektromos erővonalrendszere és az ekvipotenciális görbéi (a szálra merőleges síkban) éppen úgy néznek ki, mint a vizsgált mágneses mező (*4. ábra*), csak éppen a szerepek cserélődnek fel: a mágneses tér erővonalai az elektrosztatikus mező potenciálvonalainak, a mágneses erővonalakra merőleges „mágneses potenciálvonalak" pedig az elektromos tér erővonalainak felelnek meg. (Még a mágneses erővonalak sűrűsége is éppen úgy függ az áramvezetőtől mért távolságtól, mint ahogy az elektrosztatikus problémánál a potenciálgörbék sűrűsége: mindkettő a távolság reciprokával arányos.)

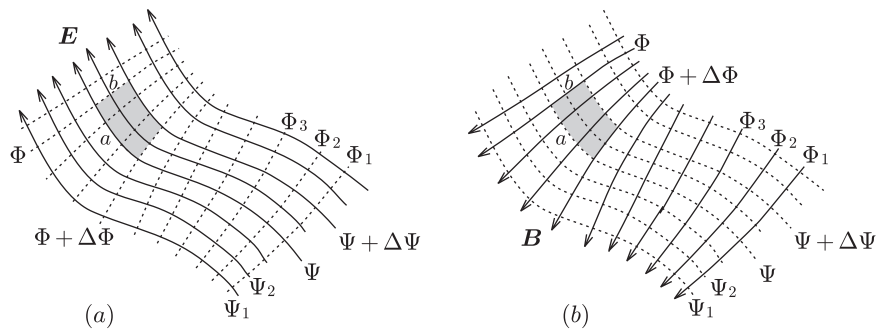


4. ábra

Felmerül a kérdés, hogy ez az analógia más, kissé bonyolultabb, még mindig vákuumbeli, de továbbra is síkbeli elektrosztatikus és magnetosztatikus mezők között is fennáll-e. (Síkbelinek nevezünk egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőt, ha csak 2 komponense különbözik nullától, és ezek csak két koordinátától függnek; pl. $v_x(x;y)$ és $v_y(x;y)$. A ponttöltés elektrosztatikus tere *nem* síkbeli, de egy hosszú egyenes vezetőé már az.) Ha igen, akkor érdemes a mágneses erővonalak (egy *vektormező* irányát és nagyságát megadó görbék) helyett a megfelelő elektrosztatikus potenciált (tehát egy *skalár* mennyiséget) kiszámítani, és megvizsgálni, hogy milyen görbék mentén állandó ez a potenciálfüggvény.

Az *5. ábra* alapján könnyen beláthatjuk, hogy az említett kettősség valóban fennáll. Az (*a*) *ábrán* a Φ-vel jelölt vonalak az (elektromos) ekvipotenciális vonalak, Ψ pedig az elektromos tér erővonalait sorszámozza. Tekintsük a besatírozott kicsiny területet, amely a és b oldalélű téglalappal közelíthető. Az elektromos térerősség nagysága kétféle módon is kiszámítható: egyrészt az erővonalak sűrűségeként (ami jelen esetben az egységnyi hosszra jutó erővonalak száma), másrészt úgy, mint az elektrosztatikus potenciál egységnyi hosszra eső megváltozása, azaz

$$|\mathbf{E}| = \frac{\Delta\Psi}{b} = \frac{\Delta\Phi}{a}.$$



5. ábra

A (b) *ábrán* látható mágneses tér szempontjából viszont azt írhatjuk fel, hogy

$$|\mathbf{B}| = \frac{\Delta\Phi}{a} = \frac{\Delta\Psi}{b}.$$

Látható, hogy a két formula ugyanazt a megszorítást rója ki Ψ és Φ egységnyi hosszra eső változási ütemére, tehát ha ez a feltétel teljesül, akkor abból akár $\mathbf{E}$, akár pedig $\mathbf{B}$ meghatározható.

Alkalmazzuk a kapottakat az eredeti problémára, a párhuzamos egyenes vezetők mágneses terére, illetve a megfelelő elektrosztatikus problémára, a párhuzamos, hosszegységenként azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltéssel rendelkező szálakra. Egyetlen töltött szál elektromos tere a száltól mért távolsággal fordítottan arányos:

$$E(r) = \frac{K}{r},$$

ahol K a szál töltésével arányos állandó. Az elektrosztatikus potenciál azzal a munkával egyenlő, amelyet akkor végzünk, amikor egységnyi töltés távolságát a száltól a potenciál nullpontjának választott r_0-nak megfelelő értékről r-re változtatjuk:

$$\Phi(r) = -K \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}\, dr = -K \ln \frac{r}{r_0}.$$

A két ellentétesen feltöltött szál együttes potenciálja

$$\Phi(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r) = K \ln \frac{r_1}{r_0} - K \ln \frac{r_2}{r_0} = K \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Ez a kifejezés akkor állandó, ha a szálaktól mért távolságok aránya állandó, vagyis ha rajta vagyunk valamelyik Apollóniosz-körön. Ezek a körök alkotják tehát az eredeti feladatban a mágneses mező erővonalait.

A fenti gondolatmenetből látszik, hogy a különböző erősségű áramokkal átjárt vezetők mágneses erővonalai az

$$(r_1)^n \cdot r_2 = \text{állandó}$$

egyenlettel írhatók le, ahol n a vezetékekben folyó áramok erősségének aránya. (Az Eötvös-versenyen szereplő feladatban $n = -1$. Ha például azonos nagyságú és megegyező irányú áramok eredő mágneses terére vagyunk kiváncsiak, az erővonalak az $r_1 r_2 =$ állandó egyenlettel jellemzett görbék, az ún. *lemniszkáták.*)

Hangsúlyoznunk kell, hogy a sztatikus elektromos és mágneses mezők közötti hasonlóság csak síkbeli problémáknál, tehát két dimenzióban áll fenn. A háromdimenziós térben az ekvipotenciális pontok felületet alkotnak, míg az erővonalak továbbra is görbék, tehát egydimenziós alakzatok, így az egyik erőtér „potenciál-térképe” biztosan nem feleltethető meg a másik erőtér erővonalainak. Azt is meg kell említenünk, hogy a „mágneses potenciálfüggvény” a szokásos matematikai függvényfogalomtól eltérően „többértékű”; ha az áramvezetőt körbejárjuk, a potenciálfüggvény értéke nem lesz ugyanannyi a végpontban, mint a kezdőpontban. (Végtelen egyenes vezetőnél pl. a mágneses potenciál az azimutszöggel arányos.) Emiatt a mágneses indukció általában *nem* konzervatív vektormező.