

2003. október 17-én rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Budapesten és 15 vidéki városban az 1949-es felújítása óta 55. Eötvös-versenyt. Új színfoltot jelentett *Kecskemét* belépése a versenybe. Sáró Péter, a Katona József Gimnázium és Számítástechnikai Szakközépiskola igazgatóhelyettese szervezésében 9 tanuló jelent meg és adott be itt dolgozatot. A többi vidéki helyszín (zárójelben a versenyt szervező tanár neve és a versenyzők száma) a következő volt:

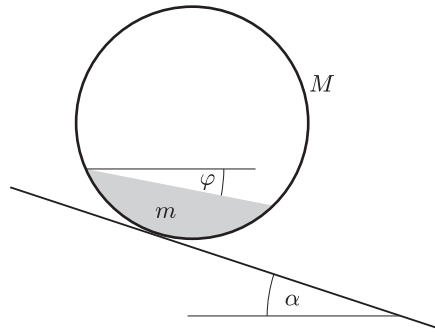
*Pécs* (Kotek László, 13); *Debrecen* (Kopcsa József, 11); *Nagykanizsa* (Piriti János, 7); *Szombathely* (Ruszkai Zoltán, 7); *Szeged* (Molnár Miklós, 6); *Veszprém* (Gergelyi Gábor, 6); *Békéscsaba* (Varga István, 4); *Székesfehérvár* (Ujvári Sándor, 4); *Győr* (Zábrádi Antal, 3); *Szekszárd* (Jurisits József, 3); *Nyíregyháza* (Poccai Péter, 2); *Sopron* (Légrádi Imre, 2); *Eger* (Vida József, 1); *Miskolc* (Mester András, 1).

Összesen 79 versenyző volt 15 vidéki városban, így a Budapesten versenyző 88 diákkal együtt 167-en indultak a 2003. évi Eötvös-versenyen. Közülük összesen 1 volt nem magyar állampolgár, a szlovákiai Révkomáromból érkezett Rakyta Péter. Tavalyhoz képest – amikor is nagyjából ugyanennyien indultak a versenyen – nőtt a budapesti és csökkent a vidéki versenyzők száma. Örvedetesen sok versenyző jött a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemről: összesen 35 elsőéves hallgató. Közülük 14-en mérnök-fizikus szakon, 12-en műszaki informatikus szakon tanulnak. Még három műszaki egyetemi matematikus hallgató is volt közöttük. Reméljük, hogy a továbbiakban ők is megtartják a fizika iránti érdeklődésüket.

A középiskolák közül idén is a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumból jött a legtöbb versenyző: 9 érettségizett, 8 érettségiző és 22 fiatalabb diák. Legalább 5 versenyző indult még a budapesti Piarista, a pécsi Leövey Klára, és a debreceni Kossuth Lajos Gimnáziumból, valamint a szombathelyi Savaria Szakközépiskolából.

Ismertetjük a feladatokat és azok helyes megoldását.

1. *Vékonyfalú henger csúszásmentesen gördül lefelé egy  $\alpha = 10^\circ$ -os lejtőn. A henger palástjának tömege  $M$ , a határoló körlapok tömege elhanyagolható. A henger belsejében  $m$  tömegű higany van. (A henger és a higany közötti súrlódás elhanyagolható.)*



1. ábra

*A higany felszínének a vízszintessel bezárt szöge valamilyen  $\varphi$  értékre állt be. Határozza meg ezt a  $\varphi$  szöget, ha*

- $M \ll m$ ;
- $M = m$ .

(Balogh Péter)

**Megoldás.** Kínálkozik a dinamikai megoldás. A higanyra erőt fejt ki a Föld és a henger. A hengerre erőt fejt ki a Föld, a higany és a lejtő. A (higany + henger) rendszerre tehát a Föld és a lejtő fejtenek ki erőt, melyek következtében a rendszer tömegközéppontja a lejtővel párhuzamos  $a$  gyorsulással mozog.  $S$ -sel jelölve a hengerre ható súrlódási erőt, a dinamika alaptörvénye szerint

$$(m + M)g \sin \alpha - S = (m + M)a.$$

A lejtőn csúszásmentesen gördülő henger az ugyancsak  $a$  gyorsulással mozgó tömegközéppontja körül  $\beta = a/R$  szöggyorsulással forog. A gyorsuló forgást az  $S$  súrlódási erő idézi elő. (Vegyük észre, hogy a higany nem forog, mivel a henger és a higany közötti súrlódás elhanyagolható.) Így a forgásra vonatkozó dinamikai egyenlet:

$$SR = MR^2 \frac{a}{R},$$

amelyből

$$S = Ma$$

adódik. Ezt a haladó mozgás dinamikai egyenletébe helyettesítve a gyorsulásra kapjuk:

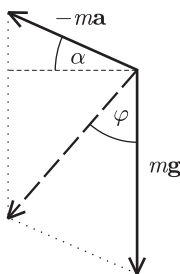
$$a = \frac{m + M}{m + 2M} g \sin \alpha.$$

Speciális esetekben:

$$a = \begin{cases} g \sin \alpha, & \text{ha } M \ll m; \\ \frac{2}{3}g \sin \alpha, & \text{ha } M = m; \\ \frac{1}{2}g \sin \alpha, & \text{ha } M \gg m. \end{cases}$$

A higany felszínének a vízszintessel bezárt szögét legegyszerűbben abból határozhatjuk meg, hogy a folyadék felszíne a folyadékkal együtt mozgó gyorsuló rendszerben is merőleges a rá ható (nehézségi + tehetetlenségi) erők eredőjére. Amekkora  $\varphi$  szöget zár be ez az eredő erő a függőlegessel, akkora  $\varphi$  szöget fog a higany felszíne a vízszintessel bezárni. A 2. ábra alapján a keresett szög tangense könnyen meghatározható:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ma \cos \alpha}{mg - ma \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{g}{a} - \sin \alpha}.$$



2. ábra

Vizsgáljuk meg a gyorsulásra felírt három speciális esetet!

a)  $M \ll m$  esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

vagyis ekkor  $\varphi = \alpha = 10^\circ$ .

b)  $M = m$  esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{3}{2 \sin \alpha} - \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{3 - 2 \sin^2 \alpha},$$

amiből  $\varphi = 6,636^\circ \approx 6,6^\circ$ .

c)  $M \gg m$  esetén

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \alpha}{\frac{2}{\sin \alpha} - \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 - \sin^2 \alpha},$$

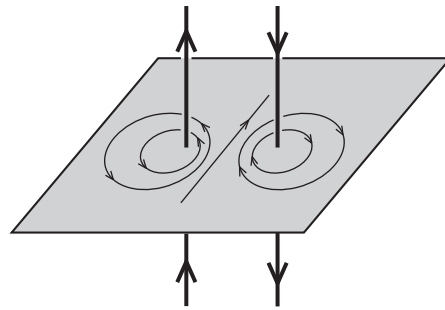
ahonnan  $\varphi = 4,962^\circ \approx 5,0^\circ$ .

*Megjegyzés.* A  $M \gg m$  eset diszkussziója nem volt feladat, itt csak a szimmetria kedvéért, no meg azért is tárgyaltuk, mert néhány versenyző figyelmetlenségéből ezt vizsgálta az  $M \ll m$  eset helyett.

**2.** Két párhuzamos, egymástól  $d$  távolságra haladó, végtelen hosszú, vékony egyenes vezetőkben egyenlő nagyságú és ellentétes irányú áramok folynak. Az indukcióvonalak a vezetőkre merőleges síkokban helyezkednek el. Válasszon ki az egyik síkban egy tetszőleges  $P$  pontot és vizsgálja meg, hogy az ezen áthaladó indukcióvonal kör alakú-e!

(Radnai Gyula)

**Megoldás.** A 3. ábra a két párhuzamos vezető által létesített mágneses tér néhány indukcióvonalát szemlélteti, amikor a vezetőkön egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú áramok haladnak át.



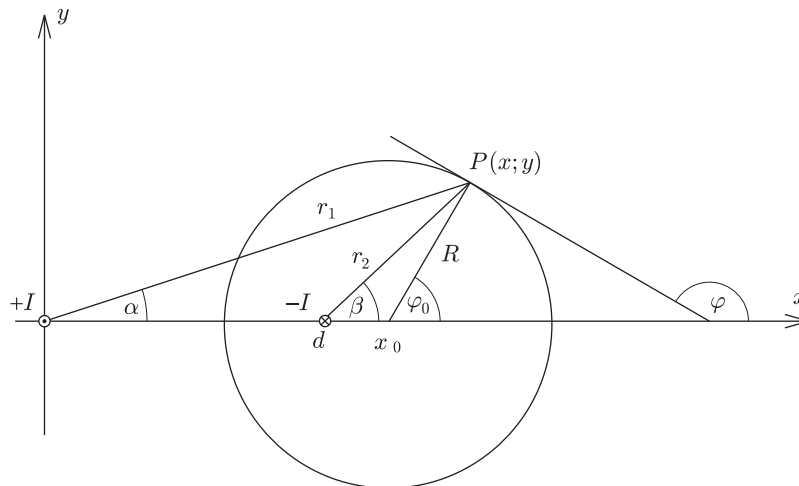
3. ábra

A speciális árameloszlás miatt a létrejövő mágneses mező nagymérvű szimmetriát mutat: az egyik és másik áramvezetőt körülölelő indukcióvonalak nemcsak egymás tükörképei, de akármelyik zárt görbe, amely mentén egy indukcióvonal halad, szimmetrikus a két áramvezetőn átfektetett síkra is. Ettől persze még lehetnek ellipszisek, körök vagy magasabb rendű zárt görbék is az indukcióvonalak, de ha van köztük kör, akkor annak a középpontja benne kell legyen az áramvezetőknél átfektetett síkban.

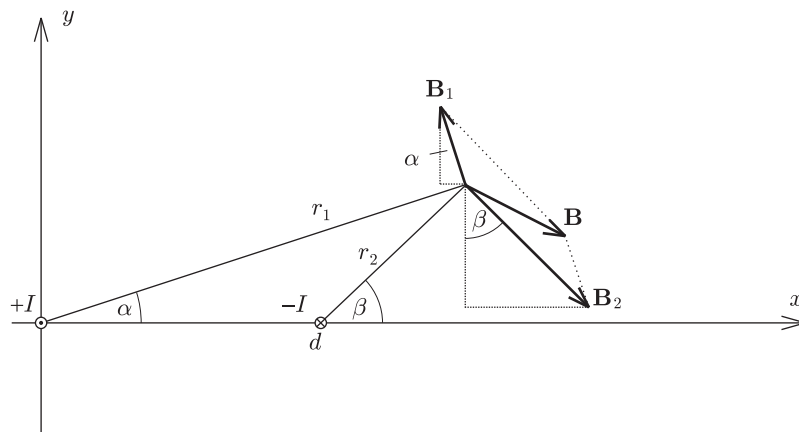
Vegyünk fel a kiválasztott síkban egy  $(x; y)$  koordináta-rendszert úgy, hogy az egyik áram az origón, a másik pedig a  $(d; 0)$  ponton dőlje át a síkot. A síkban kiválasztott  $P(x; y)$  ponton átmenő körök közül tehát csak azok jöhetnek szóba indukcióvonalaként, amelyek középpontja rajta van az  $x$  tengelyen. Egy ilyen kör középpontja legyen az  $(x_0; 0)$  pont. A kör egyenlete ekkor

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2,$$

ahol  $R$   $d$ -től és  $x_0$ -tól függő mennyiség.



4. ábra



5. ábra

Ha ez a kör indukcióvonal, akkor az indukcióvektor állása a kör bármely pontjában megegyezik az ottani érintő állásával (4. ábra). A  $P(x; y)$  ponton átmenő érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} = -\frac{1}{\frac{y}{x-x_0}} = -\frac{x-x_0}{y}.$$

Ezt kell majd összevetnünk a  $P$  pontbeli indukcióvektoron átfektetett egyenes iránytangensével. Az eredő  $\mathbf{B}$  iránytangense (5. ábra):

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_{1y} + B_{2y}}{B_{1x} + B_{2x}}.$$

Határozzuk meg ezt a mennyiséget! Egyetlen egyenes vezető által keltett indukcióvektor nagysága:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Ennek és az 5. ábráról leolvasható geometriai összefüggéseknek a felhasználásával az egyes összetevők:

$$B_{1y} = B_1 \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\cos \alpha}{r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{r_1^2},$$

$$B_{2y} = -B_2 \cos \beta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\cos \beta}{r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{(d-x)}{r_2^2},$$

$$B_{1x} = -B_1 \sin \alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y}{r_1^2},$$

$$B_{2x} = B_2 \sin \beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\sin \beta}{r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y}{r_2^2}.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a  $\operatorname{tg} \varphi_B$ -re felírt összefüggésbe! Egyszerűsítés után:

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{\frac{x}{r_1^2} + \frac{d-x}{r_2^2}}{-\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2}} = \frac{x \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{d}{r_2^2}}{-y \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)} = -\frac{x - \frac{d}{1 - (r_2/r_1)^2}}{y}.$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor egyenlő a korábban kapott

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{x-x_0}{y}$$

képlettel, ha

$$x_0 = \frac{d}{1 - (r_2/r_1)^2}.$$

Behelyettesítve az  $r_2 = \sqrt{y^2 + (x-d)^2}$  és  $r_1 = \sqrt{y^2 + x^2}$  kifejezéseket, rendezés után a következőt kapjuk:  $(x-x_0)^2 + y^2 = x_0(x_0-d)$ . Ez pedig pontosan a megadott  $P$  ponton is átmenő,  $(x_0; 0)$  középpontú kör egyenlete, vagyis ez az indukcióvonal *kör alakú!* Megkaptuk a kör sugarát is:

$$R = \sqrt{x_0(x_0-d)}.$$

Íme, ebben a mágneses mezőben minden indukcióvonal kör alakú, hiszen  $P$  a tér tetszőleges pontja lehet. Egy ponton csak egyetlen indukcióvonal mehet át, az pedig kör alakú.

*Megjegyzések.* 1. A síkban azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek két adott ponttól vett távolságainak aránya állandó, az ún. Apollóniosz-kör. Eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a vizsgált mágneses térben az indukcióvonalak Apollóniosz-körök.

Bevezetve az  $r_2/r_1 = \lambda$  jelölést, e körök egyenlete

$$\left( x - \frac{d}{1-\lambda^2} \right)^2 + y^2 = \left( \lambda \frac{d}{1-\lambda^2} \right)^2,$$

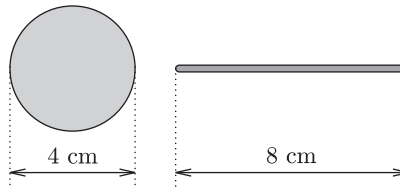
amiből többek között az  $R = \lambda x_0$  érdekes összefüggés is leolvasható. (Apollóniosz időszámításunk kezdete előtt 262-től 190-ig élt; a kúpszeletekről írt munkájában ő vezette be az ellipszis, parabola és hiperbola kifejezéseket.)

2. Ha csak kicsit is általánosabb esetet vizsgálunk, a számolás meglehetősen elbonyolódik, és soha többé nem kapunk kör alakú indukcióvonalakat. Érdekes lenne számítógépes szimulációval meghatározni az ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú áramok keltette mágnes tér indukcióvonalait, hiszen erre  $r \ll d$  esetén (az egyik áram közvetlen közelében) ugyanúgy, mint  $r \gg d$  esetén (ahonnan a két áram már egyetlen  $|I_1 - I_2|$  nagyságú áramnak látszik) az indukcióvonalak egyre jobban hasonlítanak a körhöz. De milyen furcsa görbék jöhetnek ki közben?

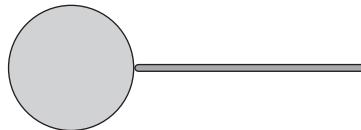
3. Egy szabadon keringő űrhajó kabinjának belsejében mozdulatlanul lebeg egy kb. 4 cm átmérőjű vízgolyó és a közelében egy kb. 8 cm hosszúságú, vékony, kör keresztmetszetű, legömbölyített végű üvegpálca. A pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a „vízcseppel”. Vázolja fel, milyen alakot vesz fel a víz!

(Károlyházy Frigyes)

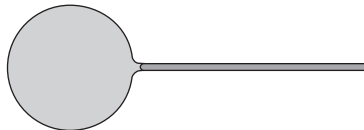
**Megoldás.** A kiindulási helyzetben (6. ábra) a vízgolyó közelében lebeg az üvegpálca.



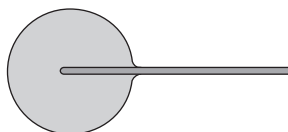
6. ábra



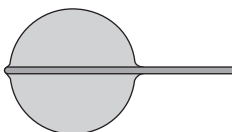
7. ábra



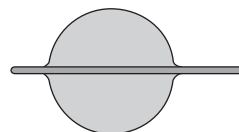
8. ábra



9. ábra



10. ábra



11. ábra

A folyamat akkor kezdődik, amikor a pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a vízcseppel (7. ábra). A víz nedvesíti az üveget, kissé „ráfolyik” a pálca legömbölyített végére (8. ábra). Itt azonban a folyamat nem állhat le, mert az üvegpálcára ható erők eredője *nem nulla*. Igaz ugyan, hogy az  $R$  sugarú vízcsepp belsejében a nyomás egy kicsit nagyobb, mint a külső légnyomás ( $\Delta p = 2\alpha/R$ ), és ez  $r^2\pi\Delta p$  erővel tolná kifelé az  $r$  sugarú pálcát, de ennél sokkal nagyobb a pálcára rásimuló vízhártya által kifejtett  $2r\pi\alpha$  nagyságú húzóerő. A pálca tehát benyomul a vízcseppbe, egy közbülső helyzet a 9. ábrán látható.

Az erőegyensúly ebben a helyzetben sem áll fenn, nincs ok, amiért a pálca megállna, egészen a 10. ábrán látható állapotig. Most már a pálca elérte a vízcsepp bal oldali szélét, kissé túl is ment rajta, a vízfelszín itt kissé kinyomódik.

Az erőegyensúly azonban csak akkor áll be, amikor a pálca bal oldali vége teljesen kibújik a vízcseppből, ekkor a pálca mindkét végét körülölelő víz felszíne ugyanolyan alakú (11. ábra).

Meg kell gondolnunk még, hogy vajon a vízcsepp nem folyik-e szét a pálcán. A rendszer összenergiája a levegővel érintkező víz felületi energiájának és a vízzel érintkező üveg energiájának összegével egyenlő; ez a mennyiség igyekszik minél kisebb lenni. Tekintettel arra, hogy a pálca *vékony*, a üveg teljesfelülete elhanyagolható a vízgolyó felületéhez képest. A rendszer egyensúlyát tehát a legkisebb vízfelszín követelménye határozza meg, ez pedig (adott térfogatú víz esetén) a gömb alaknál teljesül.

A végállapotban tehát a vízgolyó majdnem pontosan gömb alakú, az üvegpálca ennek a gömbnek egyik átmérője mentén helyezkedik el, és mindkét végét „kidugja” a vízből.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre 2003. november 21-én került sor az ELTE lágymányosi déli épületének *Mogyoródi József* tantermében, ott, ahol a budapesti versenyzők a dolgozatokat is írták.

Először a Versenybizottság elnöke emlékezett meg a nemrég elhunyt *Teller Edéről*, és bemutatta azokat a feladatokat, amelyek kiváló megoldásával Teller Ede megnyerte az 1925. évi Eötvös-versenyt. A megjelentek egyetértettek abban, hogy azok bizony könnyebb feladatok voltak, mint az ideiek. Igaz, nem is állt rendelkezésre a felkészüléshez annyi jó példatár és szakirodalom, nem voltak felkészítő szakkörök.

Azután az 50 évvel ezelőtti Eötvös-verseny feladatainak bemutatása következett, s egy diákkori fénykép az akkori nyertesről, *Zawadowski Alfréd* akadémikusról. (Sajnos ő nem tudott eleget tenni a díjkiosztásra szóló meghívásnak, mert külföldön tartózkodott. Talán majd a következőre eljön, amire újra meg fogjuk hívni, mert 1954-ben is díjazott volt az Eötvös-versenyen.) Ami az 1953-as feladatokat illeti, azok se voltak nehezebbek az 1925-ös feladatoknál. Ezen se csodálkozhatunk, akkor még nem is volt fizika rovata az újra indított Középiskolai Matematikai Lapoknak.

A bevezető visszaemlékezések után következett a 2003. évi Eötvös-verseny feladatok és ezek helyes megoldásainak bemutatása. Az első két feladat *Radnai Gyula* által adott megoldását *Gnädig Péter* egészítette ki érdekes megjegyzésekkel és egy meglepő analógián alapuló megoldás ismertetésével, míg a harmadik feladat különböző megközelítésű megoldásainak bemutatására a legjobb versenyzőket kérte fel a Versenybizottság elnöke.

A verseny díjait *Németh Judit* akadémiai levelező tag, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

*I. díjat* és 20 ezer forint értékű könyvutalványt kapott **Horváth Márton**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa.

*II. díjat* kaptak, kiegészítve 15-15 ezer forintos könyvutalványokkal **Csóka Endre**, az ELTE matematikus hallgatója, aki a debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett mint *Szegedi Ervin* tanítványa és **Kómár Péter**, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Dvorák Cecília* tanítványa.

*III. díjat* és 10-10 ezer forintos könyvutalványt nyert **Backhausz Ágnes**, az ELTE matematikus hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Burmeister Dániel**, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Zsúdel László* tanítványa; **Rakya Péter**, a révkomáromi Selye János Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Szabó Endre* tanítványa; **Szekeres Balázs**, a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a szolnoki Verseyhy Ferenc Gimnáziumban érettségizett mint *Lapu Béla* tanítványa; **Vigh Máté**, a pécsi Babits Mihály Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Koncz Károly* és *Kotek László* tanítványa és **Zsuga Sándor**, a kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Késmárki Andrásné* tanítványa.

*Dicséretet* kaptak a következők: **Balogh László**, a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa; **Nagy Róbert**, a budapesti Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Pákó Gyula* tanítványa; **Nádor Csaba**, a BMGE mérnök-fizikus hallgatója, aki a budapesti Kassák Lajos Gimnáziumban érettségizett mint *Magyari Gyula* tanítványa; **Ruppert László**, a BMGE matematikus hallgatója, aki a pécsi Janus Pannonius Gimnáziumban érettségizett, mint *Keresztesné Borsos Sarolta* és *Kotek László* tanítványa.

A dicséretes versenyzők a Nemzeti Tankönyvkiadótól kaptak 8-8 ezer forint értékű könyvutalványt, a díjazottak pedig plusz 2-2 ezer forint értékűeket.

Befejezésül az elnök megköszönte az Oktatási Minisztériumnak és a Nemzeti Tankönyvkiadónak a könyvutalványokat, a Typotex Kiadónak és a Műszaki Kiadónak pedig azokat a felajánlott jutalomkönyveket, amelyekből a nyertes versenyzők megjelent tanárai válogathattak.

Legboldogabb versenyző idén is az I. díjas volt, aki az erkölcsi győzelem mellé megkapta még a Társulat Eötvös-verseny érmét is. Immár ketten vannak az országban, akik ilyen érmmel rendelkeznek.