1. *Tekintsük azokat a forgáshengereket, amelyekben az alapkör sugarának és a henger magasságának az összege* 10 cm. *E forgáshengerek közül melyiknek a palástfelszíne a legnagyobb? Mennyi ez esetben a henger térfogata?*

Megoldás. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $0 \le (a-b)^2$, amiből

$$4ab \le (a+b)^2, \quad \text{így} \quad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Legyen a forgáshenger alapkörének sugara r, magassága m. A henger palástfelszíne $P(r;m) = 2\pi rm$. Most $r + m = 10$.

$$P = 2\pi rm \le 2\pi \left(\frac{r+m}{2}\right)^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 50\pi.$$

A maximális palástfelszín $r = m = 5$ cm esetén adódik. Ekkor a henger térfogata $V = 5^2 \cdot \pi \cdot 5 = 125\pi$ cm^3.

2. *Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:*

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = 3a, \\ x + (a+1)y = 2. \end{cases}$$

Megoldás. Helyettesítve vagy az egyenlő együtthatók módszerével x kiküszöbölhető, kapjuk: $(4 - a^2)y = a + 2$.

a) Ha $|a| \ne 2$, akkor $y = \dfrac{1}{2-a}$ és $x = 3 \cdot \dfrac{a-1}{a-2}$.

b) Ha $a = -2$, akkor $-3x + 3y = -6$ és $x - y = 2$, tehát a megoldások az $x = t + 2$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ számpárok.

c) Ha $a = 2$, akkor $x + 3y = 6$ és $x + 3y = 2$, az egyenletek ellentmondóak, ebben az esetben nincs megoldás.

3. *Egy húrtrapéz területe* $144\sqrt{3}$ cm^2, *a szárak hossza megegyezik a trapéz köré írt kör sugarával. Számítsuk ki a trapéz magasságát, átlóját és középvonalának hosszát. Kiszámítható-e a trapéz párhuzamos oldalainak hossza?*

Megoldás. Az $ABCD$ húrtrapéz AD és BC száraira $AD = BC = r$, ahol r a trapéz köré írt kör sugara. Ha a trapéz köré írt kör középpontja O, akkor az OBC háromszög mindhárom oldala r, a kör rövidebb BC ívéhez tartozó középponti szöge $60°$, így $CAB\sphericalangle = 30°$. Legyen $AB > DC$, a C vetülete az AB oldalon C_1. Ekkor CC_1 a trapéz magassága, AC_1 hossza pedig megegyezik a trapéz középvonalának hosszával (miért?). Így, ha $CC_1 = m$ és $CAC_1\sphericalangle = 30°$, akkor $AC = 2m$ és $AC_1 = m\sqrt{3}$. A feltétel szerint

$$m\sqrt{3} \cdot m = 144\sqrt{3}, \quad \text{tehát} \quad m = 12 \text{ cm}.$$

$AC_1 = 12\sqrt{3}$ cm és az átló $AC = 24$ cm.

Végtelen sok ilyen húrtrapéz létezik, a párhuzamos oldalak hossza nem számítható ki.

4. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $$\sqrt{4 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 9} = 3 - 2^{x+1};$$

b) $$\sqrt{2\cos 2x - 4\cos x + 3} = 1 - 2\cos x.$$

Megoldás. *a)* $4 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^{x+1} + 9 = (2^{x+1} - 3)^2$, tehát $|2^{x+1} - 3| = 3 - 2^{x+1}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2^{x+1} - 3 \le 0$, $2^{x+1} \le 3$, $x + 1 \le \log_2 3$, $x \le \log_2 \dfrac{3}{2}$.

b) $$2\cos 2x - 4\cos x + 3 = 2(2\cos^2 x - 1) - 4\cos x + 3 = (2\cos x - 1)^2,$$

tehát $|2\cos x - 1| = 1 - 2\cos x$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2\cos x - 1 \le 0$, $\cos x \le \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

5. S_n, S_k, S_{n+k} *egy számtani sorozat első* n, k, *illetve* $n+k$ *tagjának az összege. Igazoljuk, hogy*

$$(n+k)(S_n - S_k) = (n-k) \cdot S_{n+k}.$$

Megoldás. Ha $n = k$, akkor az állítás igaz $(0 = 0)$. Legyen $n \ne k$. Az ismert összegképletek szerint

$$S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big), \quad S_k = \frac{k}{2}\big(2a_1 + (k-1)d\big) \quad \text{és} \quad S_{n+k} = \frac{n+k}{2}\big(2a_1 + (n+k-1)d\big).$$

Mivel

$$S_n - S_k = (n-k)a_1 + \left(\frac{n^2-n}{2} - \frac{k^2-k}{2}\right)d = (n-k)a_1 + \frac{n-k}{2}(n+k-1)d =$$

$$= \frac{n-k}{2}\big(2a_1 + (n+k-1)d\big),$$

azért valóban

$$(n+k)(S_n - S_k) = \frac{(n+k)(n-k)}{2}\big(2a_1 + (n+k-1)d\big) = (n-k)\cdot S_{n+k}.$$

6. *Tekintsük a $[-4;4]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto f(x)$ függvényt, ahol*

$$f(x) = \frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}.$$

Számítsuk ki a függvény maximumát és minimumát, valamint azokat az x értékeket, ahol ezeket felveszi a függvény.

Megoldás. Mivel minden valós x esetén $|x+3|+|x-1|>0$, azért a kifejezés a $[-4;4]$ intervallumban valóban értelmezett.

a) Ha $-4 \le x \le -3$, akkor $f(x) = \dfrac{3-x-x-1}{-3-x-x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, a függvény szigorúan monoton növekvő: $f(-4) = \dfrac{5}{3} \le f(x) \le 2 = f(-3)$.

b) Ha $-3 < x < -1$, akkor $f(x) = \dfrac{3-x-x-1}{x+3-x+1} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$, a függvény szigorúan monoton csökkenő, a felvett függvényértékek: $f(-3) = 2 > f(x) > 1 = f(-1)$ (nyitott intervallumban egy szigorúan monoton függvény sem legkisebb, sem legnagyobb értéket nem vesz fel).

c) Ha $-1 \le x \le 1$, akkor $f(x) = 1$.

d) Ha $1 < x < 3$, akkor $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, a felvett függvényértékek: $f(1) = 1 > f(x) > \dfrac{1}{2} = f(3)$.

e) Ha $3 \le x \le 4$, akkor $f(x) = \dfrac{x-3+x+1}{x+3+x-1} = \dfrac{x+1-2}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$ és a felvett függvényértékek: $f(3) = \dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{3}{5} = f(4)$.

Az f függvény legnagyobb értéke 2, amit a -3 helyen vesz fel, legkisebb értéke $\dfrac{1}{2}$, amit a 3 helyen vesz fel.

7. *Igazoljuk, hogy ha α, β egy háromszög két szöge és*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta,$$

akkor a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú.

Megoldás. Azonos átalakításokkal

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) =$$

$$= \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta).$$

A feltételi egyenletből

$$\big(\sin(\alpha-\beta)\big)\big(1-\sin(\alpha+\beta)\big) = 0.$$

Ha $\sin(\alpha-\beta) = 0$, akkor $\alpha - \beta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tehát most $\alpha = \beta$, ha $\sin(\alpha+\beta) = 1$, akkor $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, most $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$, azaz valóban a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

8. *Tapasztaljuk, hogy*

$$44 - 8 = 6^2, \quad 4444 - 88 = 66^2, \quad 444\,444 - 888 = 666^2.$$

Igazoljuk, hogy

$$\underbrace{44\ldots4}_{2n \text{ jegyű}} - \underbrace{88\ldots8}_{n \text{ jegyű}} = \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ jegyű}}{}^2.$$

Megoldás.

$$\underbrace{44\ldots4}_{2n\text{ jegyű}}=\underbrace{44\ldots4}_{\substack{n\text{ szám-}\\\text{jegy}}}\underbrace{00\ldots0}_{\substack{n\text{ szám-}\\\text{jegy}}}+\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}=\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}\cdot10^n+\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}},$$

$$\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ jegyű}}=2\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}.$$

Az adott szám:

$$\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}\cdot10^n+\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}-2\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}=\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ jegyű}}\cdot(10^n-1)=(4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ jegyű}})(9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ jegyű}})=$$

$$=6^2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ jegyű}}{}^2=(\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ jegyű}})^2.$$