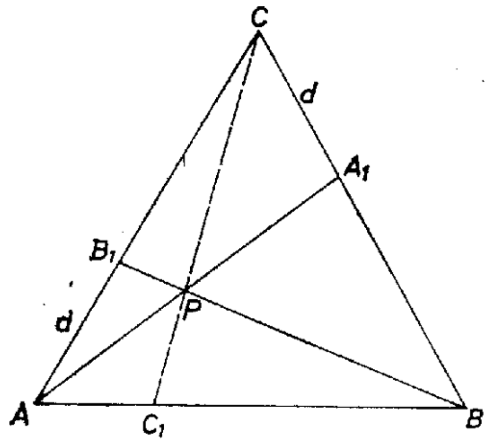
Az elfogadott állítások szerint esetünkben $s < 2$, illetve $s_1 < 1$, ennélfogva $c \geqq 1$ mellett nincs megfelelő P pont. Megmutatjuk viszont, hogy bármely $c < 1$ számhoz található olyan P, amelyre egyidejűen $s > 2c$ és $s_1 > c$.



Ha egy c_0 számhoz találtunk ilyen P pontot, ez a pont nyilvánvalóan megfelel minden kisebb c szám, azaz $c < c_0$ esetére is. Ezért bizonyításunkban elég olyan c_0-ra gondolnunk, amely kicsiny $\varepsilon > 0$ hiányt mutat az 1-hez képest, vagyis $1 - c_0 = \varepsilon$, $c_0 = 1 - \varepsilon$.

Mérjünk föl egy $d(< 1)$ szakaszt A-tóI C felé, valamint C-től B felé, és tekintsük az AA_1, BB_1 szakaszok P^* metszéspontját (ami nyilvánvalóan belső pontja az ABC háromszögnek). Azt mutatjuk meg, hogy lehet d-t úgy választani, hogy P^*-ra teljesüljön $\frac{s}{2} > c_0$ és $s_1 > c_0$. Az ABC háromszög három szimmetriatengelye alapján elég eleve a $d \leqq \frac{1}{2}$ értékekre szorítkoznunk. 1.) Az A_1AC háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség alapján $A_1A > AC - A_1C = 1 - d$. Az A_1AC és B_1BA háromszögek egybevágók és a B_1AP^* háromszög hasonló hozzájuk, mert szögeik páronként egyenlők, így

$$\frac{AP^*}{AC} = \frac{AB_1}{AA_1} = \frac{d}{AA_1} < \frac{d}{1-d} = \frac{2d}{2-2d} < 2d,$$

azaz $AP^* < 2d$. Így a P^* pontra (C_1-nek AB-ből CP^*-gal való kimetszése után)

$$s_1 = P^*A_1 + P^*B_1 + P^*C_1 > P^*A_1 = AA_1 - AP^* > (1-d) - AP^* > (1-d) - 2d = \\ = 1 - 3d.$$

tehát $s_1 > c_0 = 1 - \varepsilon$ teljesüléséhez elegendő, ha $1 - 3d > 1 - \varepsilon$ azaz $d < \frac{\varepsilon}{3}$. 2.) Most már a P^*AB és a P^*AC háromszögekből $P^*B > BA - P^*A > 1 - 2d$, illetve $P^*B > 1 - 2d$, ennélfogva P^*-ra $s = P^*A + P^*B + P^*C > P^*B + P^*C > 2 - 4d$, tehát $\frac{s}{2} > 1 - 2d > c_0 = 1 - \varepsilon$ teljesüléséhez elegendő, ha $d < \frac{\varepsilon}{2}$. – Az s_1 esetében a mostaninál erősebb korlátozást kaptunk d-re, tehát ha $\frac{\varepsilon}{2}$ -nél kisebb d-vel jelöljük ki A_1-et és B_1-et, akkor a fönti P^*-ra mindkét követelmény teljesül, P^* megfelel a keresett P céljára. – Ezzel bebizonyítottuk állításunkat, a kérdéses c számok azok, amelyekre $c < 1$.

Megjegyzések. 1. Nagyon durva elhanyagolásokat végeztünk becsléseinkben – persze mindig a megfelelő irányban –, de célunkra ez is elegendő volt.

2. Nem volt szükség annak belátására, hogy szabályos háromszögben bármely belső P pontra az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok kisebbek 1-nél.