1. *Határozzuk meg azt az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre*

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=2003.$$

Megoldás. Írjuk fel a számokat helyi érték szerint:

$$1000a+100b+10c+d+100a+10b+c+10a+b+a=2003\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1111a+111b+11c+d=2003.$$

$0\le a,b,c,d\le 9$ és a, b, c, és d egész számok.

A fentiekből következik, hogy $a=1$. Így

$$111b+11c+d=892 \quad\Rightarrow\quad b=8 \quad\Rightarrow\quad 11c+d=4 \quad\Rightarrow\quad c=0,\ d=4.$$

A keresett szám 1804. Ez megfelel a feltételeknek, mert $1804+180+18+1=2003$.

2. *Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra, az egyiknek a hossza 5, a trapéz magassága 4. Mekkora a területe?*

Megoldás. Jelöljük a trapéz átlóit a szokásos módon e-vel és f-fel, a párhuzamos oldalak hossza legyen a és c, a magasság m. Ekkor a trapéz területe:

$$T=\frac{e\cdot f}{2}=\frac{(a+c)\cdot m}{2}\Rightarrow\frac{5\cdot f}{2}=\frac{(a+c)\cdot 4}{2}\Rightarrow a+c=\frac{5}{4}\cdot f.$$

Az egyik átló megfelelő eltolásával létrejön egy olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói e és f, az átfogója $a+c$, ezért $(a+c)^2=e^2+f^2\Rightarrow\dfrac{25}{16}\cdot f^2=25+f^2\Rightarrow f=\dfrac{20}{3}$.

Ezek felhasználásával a keresett terület:

$$T=\frac{5\cdot\frac{20}{3}}{2}=\frac{50}{3}.$$

3. *Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\,(y^2+2y+2).$$

Megoldás. Az egyenlet minden valós számpárra értelmezve van. Hasonlítsuk össze a két oldal értékkészletét, miután elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel:

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right|=y^2+2y+2\Rightarrow\left|\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right|=(y+1)^2+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=(y+1)^2+1.$$

Mivel $0\le\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$ és $(y+1)^2+1\ge 1$, azért az egyenlet csak abban az esetben teljesül, ha $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1$ és $(y+1)^2+1=1$ egyidejűleg fennáll. Ebből $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ és $y=-1$. Ezek a számpárok kielégítik az eredeti egyenletet.

4. *Egy háromszögben az α szöget közrezáró oldalak hossza $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$, a harmadik oldalé $\sqrt{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$. Igaz-e, hogy a terület mérőszáma racionális szám?*

Megoldás. A terület mértékszámának meghatározásához ki kell számítanunk a háromszög oldalait.

A koszinusztétel szerint:

$$\left(\sqrt{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\right)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\ (0^\circ<\alpha<180^\circ)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2\cdot\cos\alpha-1)=0.$$

A háromtényezős szorzat első tényezője nem lehet 0 az α-ra felírt feltétel miatt. Ha $\cos\alpha=0$, akkor $\alpha=90^\circ$, így a háromszög egyik oldala 0, de ez nem lehet. Ha a harmadik tényező 0, azaz $2\cdot\cos\alpha-1=0$, akkor $\alpha=60^\circ$. A háromszög oldalai:

$$b=\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad c=\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad a=\sqrt{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Ezekre az oldalakra teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, tehát létezik ilyen háromszög.

A háromszög területe:

$$T=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{3}{16}.$$

Ez racionális érték.

5. *Határozzuk meg az „a” valós paraméter értékét úgy, hogy a következő kifejezés értelmezési tartománya üres halmaz legyen:*

$$\sqrt{(a^2-2a-3)\cdot x^2+(2a-3)\cdot x+1}.$$

Megoldás. A kifejezés értelmezési tartománya pontosan akkor üres halmaz, ha minden valós x-re teljesül az $(a^2-2a-3)\cdot x^2+(2a-3)\cdot x+1<0$ egyenlőtlenség. Ez akkor igaz, ha $a^2-2a-3<0$, és ugyanakkor $D=(2a-3)^2-4\cdot(a^2-2a-3)<0$.

$$a^2-2a-3<0\Rightarrow(a+1)\cdot(a-3)<0\Rightarrow-1<a<3.$$

$$D=4a^2-12a+9-4a^2+8a+12<0\Rightarrow a>\frac{21}{4}.$$

Az „a”-ra kapott két feltétel egyszerre nem teljesülhet, így nincs olyan „a” valós érték, amelyre az adott kifejezés értelmezési tartománya üres halmaz lenne.

Megjegyzés: Bevethetjük a behelyettesítést – ezt a legegyszerűbb, de olykor meglepően hatásos fogást: ha $x=0$, akkor a gyökjel alatt 1 áll, az értelmezési tartomány tehát nyilván nem lehet üres.

6. *Egy növekvő mértani sorozatban az első és az n-edik tag összege 66, a második és az $(n-1)$-edik tag szorzata 128, az első n tag összege 126. Írjuk fel a sorozat első n tagját.*

Megoldás. A feltételek alapján $q\neq1$, így az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$a_1+a_1\cdot q^{n-1}=66,$$
$$a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^{n-2}=128,$$
$$a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=126.$$

A második egyenletből $q^{n-1}=\dfrac{128}{a_1^2}$. Ha ezt behelyettesítjük az első egyenletbe, akkor rendezés után a_1-re egy másodfokú egyenletet kapunk: $a_1^2-66a_1+128=0$. Ennek megoldásai: $(a_1)_1=64$, $(a_1)_2=2$.

$a_1=64\Rightarrow q^{n-1}=\dfrac{128}{64^2}=\dfrac{1}{32}$, ami növekvő mértani sorozatban nem lehet.

$a_1=2\Rightarrow q^{n-1}=\dfrac{128}{2^2}=32\Rightarrow q^n=32q$. Ha ez utóbbi kifejezést behelyettesítjük az egyenletrendszer harmadik egyenletébe, akkor $2\cdot\dfrac{32q-1}{q-1}=126\Rightarrow q=2$ és $n=6$.

A sorozat első n tagja: 2; 4; 8; 16; 32; 64. Ez a sorozat a feladat összes feltételének eleget tesz.

7. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az*

$$\frac{a+bx}{a-bx}-\frac{a-bx}{a+bx}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

egyenletet, ahol $a\neq0$, $b\neq0$, $|a|\neq|b|$ és $a,b\in\mathbb{R}$.

Megoldás.

$$a-bx\neq0\Rightarrow x\neq\frac{a}{b}$$
$$a+bx\neq0\Rightarrow x\neq-\frac{a}{b}.$$

Közös nevezőre hozunk, majd eltávolítjuk a törtet:

$$\frac{a^2+2abx+b^2x^2-a^2+2abx-b^2x^2}{a^2-b^2x^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}\Rightarrow4abx(a^2-b^2)=4ab(a^2-b^2x^2).$$

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a 0-tól különböző $4ab$-vel:

$$x\cdot(a^2-b^2)=a^2-b^2x^2\Rightarrow b^2x^2+(a^2-b^2)x-a^2=0\ (b\neq0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{b^4-2a^2b^2+a^4+4a^2b^2}}{2b^2}\Rightarrow x_1=1,\quad x_2=-\frac{a^2}{b^2}.$$

A kizárt értékeket figyelembe véve:

$$x_1=1\neq\frac{a}{b}\Leftrightarrow a\neq b;\qquad x_1=1\neq-\frac{a}{b}\Leftrightarrow a\neq-b;$$

$$x_2=-\frac{a^2}{b^2}\neq\frac{a}{b}\Leftrightarrow-a^2b\neq ab^2\Leftrightarrow ab(a+b)\neq0;$$

$$x_2=-\frac{a^2}{b^2}\neq-\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2b-ab^2\neq0\Leftrightarrow ab(a-b)\neq0.$$

Mindkét gyök eleget tesz a feladat feltételeinek, így $x_1 = 1$ és $x_2 = -\dfrac{a^2}{b^2}$ az eredeti egyenletnek is megoldásai.

8. *Adjuk meg azoknak a valós számoknak a halmazát, amelyekre az alábbi két egyenlőtlenség egyszerre teljesül:*

$$(1) \qquad x^{\log_{36}(x+6)-\log_6 x} > 1 \qquad\qquad (2) \qquad \sin\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \le 0$$

Megoldás. Az (1) egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha az x pozitív. Először keressük meg az 1-nél nagyobb számok között a megoldást. $x^{\log_{36}(x+6)-\log_{36} x^2} > x^0$. Ebben az esetben az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$\log_{36}(x+6) - \log_{36} x^2 > 0 \Rightarrow \log_{36}(x+6) > \log_{36} x^2 \Rightarrow x+6 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)\cdot(x-3) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3.$$

Ha $0 < x < 1$, akkor az $x^2 - x - 6 > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, amelynek nincs megoldása a $(0;1)$ nyílt intervallumban.

Az $x = 1$ esetén nem teljesül az egyenlőtlenség, ezért a megoldás: $1 < x < 3$.

A második egyenlőtlenség minden valós számra értelmezve van. Akkor teljesül, ha $\pi + k\cdot 2\pi \le \cos x + \dfrac{1}{2} \le 2\pi + k\cdot 2\pi$. De $-\dfrac{1}{2} \le \cos x + \dfrac{1}{2} \le \dfrac{3}{2}$, ezért $k = -1$, azaz $-\pi \le \cos x + \dfrac{1}{2} \le 0 \Rightarrow \cos x \le -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi$. ($k$ és n egész számok.) A két egyenlőtlenség egyszerre akkor igaz, ha $\dfrac{2\pi}{3} \le x < 3$.