

Szüleim és bátyám emlékére

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$\begin{array}{ll} a) & (2y - 1)(y - 1) = 0; \\ b) & 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0; \\ c) & 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0; \\ d) & 2 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1 = 0. \end{array}$$

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{ll} a) & 2y^2 - 3y + 1 > 0; \\ b) & 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 > 0; \\ c) & 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0; \\ d) & 2 \cdot \log_2^2 x - \log_2 x^3 + 1 > 0. \end{array}$$

3. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai: $A(-2; 3)$ és $B(1; 2)$. Számítsuk ki a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit.

4. Számítsuk ki p és q értékét, ha az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke 2, a másik gyöke pedig az egyenlet diszkriminánsának háromszorosa.

5. Az ABC háromszögben $AC = 10$, $BC = 15$ és $\angle C = 60^\circ$.

- Mekkora annak a félkörnek a sugara, amelynek átmérője az AB oldalra esik, és érinti a másik két oldalt?
- Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti az előbbi félkört, valamint az AC és BC oldalakat?

6. Egy számtani sorozat differenciája $\frac{2}{3}$, az első n tag összege $\frac{8}{3}$, az első $(n + 3)$ tag összege $\frac{44}{3}$. Számítsuk ki n értékét és a sorozat első tagját.

7. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{(x + 5)^2 - (x - 5)^2}{(2x + 5)^2 + (2x - 5)^2}$ függvényt. Számítsuk ki a függvény legnagyobb és legkisebb értékét, valamint azokat az x értékeket, ahol ezeket a függvény felveszi.

8. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja K . Az ABK , BCK , CDK és a DAK háromszögek területe rendre t_1 , t_2 , t_3 és t_4 . Igazoljuk, hogy a négyszög AB és DC oldalai pontosan akkor (akkor és csak akkor) párhuzamosak, ha a négyszög T területe

$$T = (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3})^2.$$