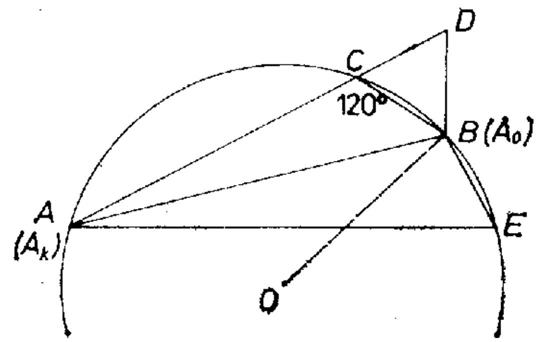
Néhány próba alapján ezt sejtjük: olyan két átló összege egyenlő egy harmadikkal, amelyek közti szög 120°. (ti. ha a két átlót a szabályos $3k$-szög egy csúcsából a két ellentétes körüljárási irányban választjuk meg, „lokalizáljuk"). Ezt fogjuk bizonyítani.



Legyen az ABC háromszögben a C-nél levő szög 120°, továbbá $CA \geqq CB$, az AC oldal C-n túli meghosszabbításán D az a pont, amelyre $CD = CB$, végül D tükörképe az AB egyenesre E. Ekkor a BCD háromszög egyenlő oldalú, ezért egyrészt $AEB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = 60° = 180° - ACB\sphericalangle$; tehát az $EACB$ négyszög húrnégyszög, E rajta van az ABC háromszög körülírt körén, másrészt $AE = AD = AC + CB$.

Megmutatjuk, hogy a szabályos $3k$-szög $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ A_{k+1},\ \ldots,\ A_{3k-1}$ csúcsai közül lehet kiválasztani olyan négyet, amelyeknek átadhatjuk az előbbi A, C, B és E pont szerepét. Nyilvánvalóan megfelel az $A = A_k$, $B = A_0$ választás, mert így a rövidebbik $AB = A_kA_0$ ívhez tartozó középponti szög $A_0OA_k\sphericalangle = k \cdot \dfrac{360°}{3k} = 120°$, a hosszabbik A_kA_0 ívhez tartozó középponti szög 240°, így a rövidebb A_0A_k ív minden belső C pontjára $A_0CA_k\sphericalangle = 120°$. Itt C szerepére alkalmas minden olyan A_i csúcs, amely nem szomszédos sem A_0-lal, sem A_k-val, azaz amelyekre $A_i \neq A_1$ és $A_i \neq A_{k-1}$, vagyis amelyekre $2 \leqq i \leqq k-2$. Ilyen sokszögcsúcs van, ha $k - 2 \geqq 2$, azaz $k \leqq 4$, továbbá ekkor E is sokszögcsúcs, hiszen C tükörképe a BO sugárra.

Feladatunk a $k > 4$ reláció bizonyítása volt. A $k = 4$ esetben két egyenlő hosszú átló összege egyenlő az A_0A_4 átlóval. Az állítás $k > 4$-re tulajdonképpen ezt mondja: van *kétféle* olyan átlóhosszúság, amely ...; hiszen természetes, hogy szabályos sokszögben mindenféle átlóhosszúság annyi példányban van meg, mint az oldalak száma – nyilvánvalóan kivéve a páros $2m$ oldalszámú sokszög leghosszabb átlóit, átmérőit: $A_0A_m,\ A_1A_{m+1},\ \ldots,\ A_{m-1}A_{2m-1}$, amelyekből csak m példány van.

Megjegyzések. 1. A megfelelő átlópárokat csak egyszer kapjuk meg, ha $2 \leqq i \leqq \dfrac{k}{2}$, tehát számuk $\left[\dfrac{k}{2}\right] - 1$.

2. Lényegben ugyanez a bizonyítás, ha arra hivatkozunk, hogy a szabályos ABF háromszög köré írt kör bármely P pontjára a PA, PB, PF szakaszok közül a két kisebb együttvéve egyenlő a legnagyobbikkal.

3. Több dolgozat használta fel Ptolemaiosz (I.) tételét (konvex húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a két-két szemben fekvő oldalból képezett szorzatok összegével).

4. Bizonyítható az állítás goniometriai úton is, annak fölhasználásával, hogy a szabályos $3k$ szög átlójára

$$A_0A_i = 2r \sin \frac{i}{2} \cdot \frac{360°}{3k} = 2r \sin \frac{i}{k} \cdot 60°, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3k-1).$$