I. megoldás. Vezessük be az $x=\alpha+60^\circ$, $y=\beta+60^\circ$ és $z=\gamma+60^\circ$ jelöléseket. Mivel α, β és γ egy háromszög szögei, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, ezért $x+y+z=360^\circ$. A

$$\cos z=\cos\left[360^\circ-(x+y)\right]=\cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y$$

összefüggés alapján (1) a következő alakot ölti :

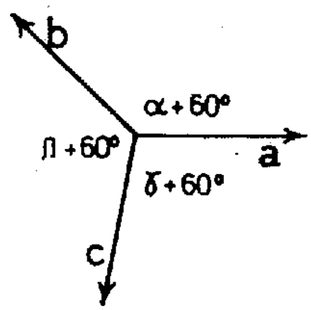
$$\cos x+\cos y+\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y+\frac{3}{2}\geqq 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel megszorozva és 3 helyébe $(1+\sin^2x+\cos^2x+\sin^2y+\cos^2y)$-t írva, a bizonyítandó egyenlőtlenségünk így alakul:

$$1+2\cos x+2\cos y+\cos^2x+2\cos x\,\cos y+\cos^2y+\sin^2x-2\,\sin x\,\sin y+\sin^2y=$$
$$(1+\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2\geqq 0.$$

Lengvárszky Zsolt (Pécs, Komarov Gimn., III. o. t.)

II. megoldás.



Az **a**, **b**, **c** egységvektorokra legyen

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\sphericalangle=\alpha+60^\circ,$$
$$(\mathbf{b},\,\mathbf{c})\sphericalangle=\beta+60^\circ,$$
$$(\mathbf{c},\,\mathbf{a})\sphericalangle=\gamma+60^\circ.$$

Ez lehetséges, mivel $(\alpha+60^\circ)+(\beta+60^\circ)+(\gamma+60^\circ)=360^\circ$ (1. ábra). Vegyük az $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektor önmagával alkotott skaláris szorzatának felét. Erre nyilván

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2\geqq 0.$$

Ha a négyzetre emelést elvégezzük, és figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2=1$, valamint $\mathbf{ab}=\cos(\alpha+60^\circ)$, $\mathbf{bc}=\cos(\beta+60^\circ)$ és $\mathbf{ac}=\cos(\gamma+60^\circ)$, éppen a bizonyítani kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

Németh Csóka Mihály (Bp., Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Egyenlőség csak akkor következik be, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$, ami viszont csak akkor teljesül, ha $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$