[1]

**Gnädig Péter, Vankó Péter**

**1. feladat.** *Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja*

*a*) Mivel a fonal hossza $L = s + R\theta$ állandó, a megfelelő változási sebességek közötti kapcsolat: $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$.

*b*) A $Q$ pont $R$ sugarú körpályán mozog $\dot{\theta}$ szögsebességgel, a sebessége $O$-hoz viszonyítva $\mathbf{v}_O = R\dot{\theta}\hat{\mathbf{t}}$, ami $-\dot{s}\hat{\mathbf{t}}$ alakba is írható.

*c*) A $P$ pont $Q$-hoz viszonyított sebessége

$$\mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \dot{s}\hat{\mathbf{t}}.$$

Az első tag az $s$ sugarú, $\dot{\theta}$ szögsebességű körmozgás kerületi sebessége, a második tag pedig a $QP$ fonálhossz változását veszi figyelembe.

*d*) A $P$ pont $O$-hoz viszonyított (tehát az inerciarendszerben mérhető) sebessége

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_Q = -s\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}.$$

Ez tisztán érintő irányú, összhangban azzal a ténnyel, hogy az $O$ pontbeli fonaldarab pillanatnyi sebessége az inerciarendszerben mérve nulla. (Maga az $O$ pont nem egy bizonyos anyagi pontot, hanem a fonal pillanatról pillanatra változó darabkáját jelöli. Ehhez a mozgó ponthoz képest a $P$ pont fonál irányú sebességgel is rendelkezik, ez a fiktív mozgás azonban az inerciarendszerből szemlélve már eltűnik.)

*e*) A $P$ pontban levő részecske gyorsulásának $\hat{\mathbf{t}}$ irányú (tehát fonál irányú) komponense a centripetális gyorsulás képletének megfelelően

$$-s\dot{\theta}^2. \tag{1}$$

*f*) A $P$ pontban levő test gravitációs helyzeti energiája

$$U(\theta) = -mg\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big].$$

(A helyzeti energiát a test indítási magasságában választottuk nullának.)

*g*) A pálya legalacsonyabb pontja $\theta = \pi/2$-nek felel meg (itt válik a sebesség függőleges komponense nullává). Ebben a pontban a test helyzeti energiája minimális:

$$U_{\min} = U(\pi/2) = -mg\big[R + L - (R\pi/2)\big].$$

Alkalmazva a mechanikai energiamegmaradás tételét:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\min},$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g\big[R + L - (R\pi/2)\big]}.$$

*h*) A test mozgási energiája egy tetszőleges $\theta$ szöggel jellemzett helyzetben (az energiamegmaradás tétele szerint)

$$\frac{1}{2}mv^2 = -U(\theta) = mg\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big],$$

ahonnan

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g\big[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta\big]. \tag{2}$$

Jelöljük $K$-val a fonalat feszítő erőt. A fonál irányú mozgásegyenlet (1) felhasználásával

$$m(-s\dot{\theta}^2) = -K + mg\sin\theta, \tag{3}$$

[1] A feladatok szövegét a KöMaL októberi számában közöltük. A kísérleti fordulóról – helyhiány miatt – csak a következő számunkban tudunk beszámolni.

ahonnan (2) segítségével kifejezhető a fonálerő:

$$K = m(s\dot{\theta}^2 + g\sin\theta) = \frac{mg}{s}\big[2R(1-\cos\theta) + 3s\sin\theta\big] =$$
$$= \frac{mgR\sin\theta}{s}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\left(\theta - \frac{L}{R}\right)\right].$$

A fonal meglazulásának ($K = 0$-nak) megfelelő $\theta_0$ szögre fennáll

$$\frac{3}{2}\left(\theta_0 - \frac{L}{R}\right) = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2},$$

amit $L/R$ megadott értékének behelyettesítésével

(4) $$\theta_0 - \frac{9\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$$

alakban is felírhatunk. Ennek az egyenletnek ránézésre megadható egy gyöke: $\theta_0 = \dfrac{9\pi}{8}$. Ha valaki nem veszi észre ezt a megoldást, numerikusan (zsebszámológép segítségével) is megkaphatja a (4) trigonometrikus egyenletet gyökét: $\theta_0 \approx 3{,}53$ radián. Ellenőrizhető, hogy a $0 < \theta < \theta_0$ tartományban $K > 0$, tehát a fonal korábban nem lazul meg.

A fonal legrövidebb, de még nem laza helyzetében

$$s = s_{\min} = L - R\theta_0 = \frac{2R}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} \approx 3{,}352\ R,$$

a test sebességének nagysága pedig ekkor (4) szerint

$$v_0 = \sqrt{-gs_{\min}\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{2gR}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16}\ \sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16} \approx 1{,}133\sqrt{gR}.$$

*i*) A mozgás további részében a test $v_0$ kezdősebességű ferde hajítást végez. A pálya legmagasabb $H$ pontjában a sebessége

$$v_H = v_0\sin(\theta_0 - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8} = 0{,}433\sqrt{gR}$$

lesz, és a $H$ pontig a vízszintes elmozdulása

$$d = \frac{v_0^2\sin 2(\theta_0 - \pi)}{2g} = \frac{\sqrt{v_0^2}}{2g}\sin\frac{9\pi}{4} = 0{,}453\,R.$$

Meg kell még vizsgálnunk, hogy a $H$ pont elérése előtt nem ütközik-e neki a test a rúdnak. A $\theta = \theta_0$ helyzetnek megfelelő pontban a test koordinátái:

$$x_0 = R\cos\theta_0 - s_{\min}\sin\theta_0 = 0{,}358\,R,$$

$$y_0 = R\sin\theta_0 + s_{\min}\cos\theta_0 = -3{,}478\,R.$$

Látható, hogy $|y_0| > R + d$, így a test valóban eléri a pálya legmagasabb pontját.

*j*) A fonál súrlódásmentes csúszása során a $m$ és a $M$ tömegű testből álló rendszer teljes mechanikai energiája állandó marad. Ha a $M$ tömegű test a mozgása során $D$-vel mélyebbre kerül, a helyzeti energiája $MgD$ értékkel csökken, ugyanennyivel nő tehát a $m$ tömegű test helyzeti és mozgási energiájának összege, és ez az összeg a fonál megtapadása után is változatlan marad.

Ha $L - D$ mellett $R$ elhanyagolható, akkor a $m$ tömegű test mozgását a továbbiakban rögzített pont körüli ingamozgásnak tekinthetjük. A fonál meglazulása szempontjából a legkényesebb helyzet a pálya legmagasabb pontja. Itt a test $L - D$ magasan van a rúd felett, sebességét pedig az

$$\frac{1}{2}mv^2 = MgD - mg(L - D)$$

egyenlet határozza meg. A fonál akkor nem lazul meg ebben a helyzetben, ha a gravitációs erő kisebb, mint a körmozgáshoz szükséges centripetális erő:

$$mg < \frac{mv^2}{L - D},$$

ami a munkatételből adódó sebesség kiküszöbölésével

$$mg < 2\frac{MgD - mg(L - D)}{L - D}$$

alakra hozható. Innen

$$\frac{D}{L} > \frac{1}{1+\frac{2M}{3m}}.$$

*Megjegyzések.* 1. A $m/M$ arány – a feladat egyszerűsítő feltevéseinek teljesülése esetén – egyértelműen meghatározza a $D/L$ hányadost, igaz, ehhez egy bonyolult differenciálegyenletet kellene megoldanunk. A fenti egyenlőtlenség tehát tulajdonképpen csak a tömegek arányára jelent megszorítást.

2. A súrlódásmentes csúszás és nagyon nagy tapadási súrlódás feltételezése nyilván távol áll a realitástól. A leírt jelenséghez hasonló azonban mégis megvalósítható. Ha egy vékony, sima rúddal és jól csúszó, kellően hajlékony fonállal (például horgászdamillal), és megfelelően választott nehezékekkel (pl. acélcsavarokkal) végezzük el a kísérletet, a mozgás első szakasza jó közelítéssel súrlódásmentesnek tekinthető. Igaz ugyan, hogy a fonal a megtapadása után vélhetően újra megcsúszik a hengeren, de a fonál fokozatos feltekeredése miatt (kötélsúrlódás) előbb-utóbb megállítja a csúszást, éppen úgy, mintha a tapadó súrlódás nagyon nagy lenne. Egyszerű eszközökkel kísérletileg is jól vizsgálható, hogy a kérdéses furcsa mozgás valóban létrejöhet, a $m$ tömegű test többször is átfordulhat a rúd felett, és a mozgás akár a fonal teljes feltekeredéséig is tarthat.

**2. feladat.** *Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel*

*a*) A rúd bal oldali részének deformációja (relatív hosszváltozása)

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{-v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{-v}{u},$$

a nyomás tehát a bal oldali felületnél

$$p = -YS = Y\frac{v}{u} = \varrho uv.$$

(Kihasználtuk, hogy a lökéshullám terjedési sebessége $u = \sqrt{Y/\varrho}$.)

*b*) Ha a rúd (helyről helyre és pillanatról pillanatra változó) elmozdulása

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x-ut),$$

akkor a sebesség (deriválással, vagy a forgómozgással való analógia kihasználásával)

$$v(x,t) = -ku\xi_0 \cos k(x-ut),$$

a deformáció (az előző alkérdés eredményének felhasználásával, vagy közvetlenül az elmozdulásfüggvény $x$ szerinti deriválásával)

$$S(x,t) = \frac{-v(x,t)}{u} = k\xi_0 \cos k(x-ut),$$

a nyomás pedig

$$p(x,t) = \varrho uv(x,t) = -k\varrho u^2\xi_0 \cos k(x-ut) = -YS(x,t).$$

*c*) A hasáb közepe nem tud elmozdulni, így $g(b/2) \equiv 0$, emiatt $B_2 = 0$. Másrészt $g(x)$ maximális értéke 1, ebből $B_1 = \pm 1$ következik.

*d*) A hasáb két végénél a nyomás (és ezzel együtt a deformáció is) minden pillanatban nulla. Ez akkor teljesül, ha a hasáb szélei (a nyitott végű csövekben kialakuló hanghullámokhoz hasonlóan) az állóhullám duzzadóhelyei. Eszerint a legnagyobb lehetséges hullámhossz a hasáb $b$ hosszának kétszerese, a megfelelő frekvencia pedig

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273\ \text{kHz}.$$

A második legkisebb frekvencia (ami annak felel meg, hogy a hasáb hossza a félhullámhossz háromszorosa):

$$f_2 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 819\ \text{kHz}.$$

*e*) A piezoelektromos hatást leíró egyik egyenletből kifejezhetjük a mechanikai feszültséget:

$$T = \big(S - d_pE\big)Y, \tag{5}$$

majd ezt a másik egyenletbe helyettesítve az elektromos töltéssűrűségre

$$\sigma = d_pY\cdot S + \left(\varepsilon_T - d_p^2Y\right)E \tag{6}$$

adódik. Az elektromos térerősséget a megadott elektromos feszültségből számíthatjuk:

$$E(x,t) = \frac{U(t)}{h} = \frac{U_m\cos\omega t}{h}. \tag{7}$$

Mivel $E$ időfüggése $\cos \omega t$ alakú, feltehetjük, hogy a hasáb $S$ deformációja is így változik időben, vagyis

(8) $$\xi(x,t) = \xi_m \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) \cdot \cos \omega t,$$

(9) $$S(x,t) = k\xi_m \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) \cdot \cos \omega t.$$

Helyettesítsük (7)-et és (9)-et az (5) egyenletbe, és használjuk ki, hogy a hasáb széleinél (pl. $x = 0$-nál) a mechanikai feszültség nulla. Innen a rezgés amplitúdójára

$$\xi_m = \frac{d_p U_m}{hk \cos(kb/2)}$$

adódik, (6)-ból pedig leolvashatjuk, hogy a kérdéses együtthatók:

$$D_1 = \frac{d_p^2 Y}{\cos(kb/2)} \qquad \text{és} \qquad D_2 = \varepsilon_T - d_p^2 Y.$$

*f*) Az előző pontban kiszámított felületi töltéssűrűséget $x$ szerint integrálva megkapjuk a hasáb egyik kontaktusán levő teljes töltést:

$$Q(t) = w\int_0^b \sigma(x,t)\,dx = C_0\left[1 + \alpha^2\left(\frac{2}{kb}\operatorname{tg}\frac{kb}{2} - 1\right)\right]U(t),$$

ahol $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ a hasáb (mint $w$ széles, $b$ hosszú és $h$ vastagságú síkkondenzátor) alacsony frekvenciákon ($\omega = ku \approx 0$) érvényes kapacitása, és

$$\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = 9{,}82 \cdot 10^{-3},$$

az ún. *elektromechanikus csatolási állandó* négyzete.

**3.A feladat.** *Neutrínótömeg és neutronbomlás*

*a*) Jelöljük az egyes részecskék (relativisztikus) energiáját $E$-vel, impulzusvektorát pedig $\mathbf{q}$-val, és mindegyiket lássuk el a részecske típusára utaló (p, n, e, illetve az antineutrínót $\nu$) indexszel! Használjunk olyan egységrendszert, amelyben a fénysebesség egységnyi (ebben a tömeget, az energiát és az impulzust egyaránt MeV-ban mérhetjük.)

A bomlási folyamat során az energiák összege és az impulzusok összege változatlan marad (ezek megmaradó mennyiségek):

(1) $$E_\mathrm{n} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{e} + E_\nu,$$

(2) $$\mathbf{q}_\mathrm{n} = \mathbf{q}_\mathrm{p} + \mathbf{q}_\mathrm{e} + \mathbf{q}_\nu.$$

Az egyes részecskék energiája és impulzusa összefügg egymással:

(3) $$E_i^2 - \mathbf{q}_i^2 = m_i^2 \qquad (i = \mathrm{n}, \mathrm{p}, \mathrm{e}, \nu),$$

amint az a megfelelő $\mathbf{v}_i$ sebességgel felírt

$$E_i = \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \qquad \mathbf{q}_i = \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}$$

formulákból könnyen leolvasható.

Képzeljük el, hogy a vizsgálandó $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \nu$ bomlási folyamat két lépésben megy végbe: a neutron először elbomlik egy elektronra és egy $x$ jelű részecskére, majd az $x$ részecske elbomlik protonra és antineutrínóra:

$$\mathrm{n} \to \mathrm{e} + x \qquad \text{majd} \qquad x \to \mathrm{p} + \nu.$$

(A megmaradási törvények szempontjából lényegtelen, hogy a folyamat ténylegesen így zajlik-e le, vagy pedig egyszerre, egyetlen pillanatban történik a neutron bomlása; a feladatban szereplő kérdésre azonban könnyebb választ adni, ha lépcsőzetesnek gondoljuk a bomlást.)

Írjuk fel a bomlás első részére a megmaradási törvényeket abban a koordináta-rendszerben, amelyben a neutron áll (azaz ahol $\mathbf{q}_\mathrm{n} = 0$ és $E_\mathrm{n} = m_\mathrm{n}$). Az impulzusmegmaradás törvénye miatt az elektron és az $x$ részecske impulzusa ugyanakkora nagyságú (de ellentétes irányú), az energiamegmaradást tehát így fogalmazhatjuk meg:

(4) $$m_\mathrm{n} = E_\mathrm{e} + E_x,$$

ahol

$$E_{\mathrm{e}}^2 - m_{\mathrm{e}}^2 \ (= q_{\mathrm{e}}^2 = q_x^2) \ = E_x^2 - m_x^2. \tag{6}$$

Fejezzük ki (5)-ből $E_x$-t és helyettesítsük be (6)-ba, majd a kapott összefüggésből határozzuk meg az elektron energiáját. Az eredmény:

$$E_{\mathrm{e}}^2 = \frac{m_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{e}}^2 - m_x^2}{2m_{\mathrm{n}}^2}. \tag{7}$$

Látható, hogy a bomlás során keletkező elektronnak annál nagyobb lesz az energiája, minél kisebb a bomlás másik termékének (az $x$ részecskének) a tömege.

Mekkora lehet $m_x$ legkisebb értéke? Erre a kérdésre legkönnyebben az $x$ részecske nyugalmi rendszerében kaphatjuk meg a választ. Mivel $x$ egy protonra és egy antineutrínóra bomlik, fennáll, hogy

$$m_x = E'_{\mathrm{p}} + E'_{\nu} \geq m_{\mathrm{p}} + m_{\nu} = m_x^{\mathrm{min}}. \tag{8}$$

(A vessző arra utal, hogy ezeket a mennyiségeket nem a laboratóriumi koordináta-rendszerben számítottuk ki, hanem az $x$ részecske nyugalmi rendszerében.

A (8) egyenlőtlenség akkor válik egyenlőséggé, amikor a proton és az antineutrínó egymáshoz képest nem mozog, tehát a laboratóriumi rendszerből nézve a sebességük megegyezik. Ebben a határesetben (7) alapján

$$E_{\mathrm{e}}^{\mathrm{max}} = \frac{m_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{e}}^2 - \left(m_x^{\mathrm{min}}\right)^2}{2m_{\mathrm{n}}^2} = \frac{m_{\mathrm{n}}^2 + m_{\mathrm{e}}^2 - \left(m_{\mathrm{p}} + m_{\nu}\right)^2}{2m_{\mathrm{n}}^2},$$

amelynek numerikus értéke 1,292 569 MeV $\approx$ 1,29 MeV.

Az antineutrínó (és vele egyezően a proton) sebessége az $x$ részecske (labor rendszerbeli) sebességével egyezik meg, ami így adható meg:

$$v_m = \frac{\sqrt{(m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{e}} + m_x)(m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{e}} + m_x)(m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{e}} - m_x)(m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{e}} + m_x)}}{m_{\mathrm{n}}^2 - m_{\mathrm{e}}^2 - m_{\mathrm{x}}^2},$$

ahol most is $m_x = m_{\mathrm{p}} + m_{\nu}$. Numerikusan (fénysebességnyi egységekben mérve) $v_m = 0{,}001\,265\,38 \approx 0{,}001\,27$.

**3.B feladat.** *Lebegtetés fénnyel*

A függőlegesen felfelé haladó fénysugarak (fotonok) – amikor az üvegen áthaladnak – irányt változtatnak, és emiatt a lendületük (impulzusuk) függőleges komponense lecsökken. Az egységnyi idő alatt „leadott impulzus” a félgömbre ható fény-nyomóerővel egyenlő, és ha ez az erő éppen egyenlő az üveg súlyával, akkor a test lebeghet. Kövessük végig mindezt számítással is!

*b*) Tekintsük a lézerfény-nyaláb azon részét, amelynek az optikai tengelytől mért távolsága $x$ és $x + \Delta x$ közé esik (ahol $\Delta x \ll x$). Ebbe a tartományba a lézer teljes $P$ teljesítményének csak egy kis hányada, a területek arányának megfelelően

$$\Delta P = \frac{2\pi x\,\Delta x}{\delta^2 \pi}\,P$$

érkezik, vagyis a kérdéses tartományba egységnyi idő alatt

$$\Delta n = \frac{\Delta P}{hf} = \frac{2xP}{\delta^2 hf}\Delta x$$

számú (egyenként $hf$ energiával rendelkező) foton érkezik. (Itt $f$ a lézerfény frekvenciája, $h$ pedig a Planck-állandó.)

A fénysugarak irányváltozása szempontjából célszerű az üveg félgömb középső (az optikai tengelyhez közeli) tartományát gondolatban két részre bontani: egy planparalel lemezre (amely a rá merőlegesen eső fénysugarakat nem töri meg) és egy síkdomború vékony lencsére, amelynek $f_0 = \dfrac{R}{n-1}$ a fókusztávolsága. Ez utóbbi $\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{f_0} = \dfrac{x}{R}(n-1)$ szöggel téríti el a fotonokat, azok kezdeti $I = \dfrac{hf}{c}$ impulzusa tehát

$$\Delta I = \frac{hf}{c}(1 - \cos\theta) = \frac{hf}{c} 2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{hf}{c}\frac{\theta^2}{2} \approx \frac{hf}{c}\frac{x^2(n-1)^2}{2R^2}$$

értékkel lecsökken ($c$ a fénysebesség vákuumban). A teljes impulzusváltozás az egyes fotonok impulzusváltozásának összege:

$$I = \sum \Delta n\,\Delta I = \sum \frac{2xP}{\delta^2 hf}\Delta x \cdot \frac{hf}{c}\frac{x^2(n-1)^2}{2R^2} = \frac{P(n-1)^2}{\delta^2 c R^2}\sum x^3 \Delta x.$$

A legutolsó kifejezésben szereplő összeg a felosztás finomításával ($\Delta x$ egyre kisebbé tételével) egy integrálba megy át:

$$\sum x^3 \Delta x \to \int_0^\delta x^3\, dx = \frac{\delta^4}{4},$$

így az egyensúly feltétele $I = \dfrac{P(n-1)^2\delta^2}{4cR^2} = mg$, ahonnan a kérdéses lézerteljesítmény:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}.$$