A 34. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai[1]

1. feladat. Inga, melynek felső végét is egy súly húzhatja

Egy R sugarú merev rudat a talaj felett bizonyos magasságban vízszintes helyzetben rögzítettünk. Egy elhanyagolható tömegű, L hosszúságú ($L > 2\pi R$) fonál egyik végét az *1. ábrán* látható módon a rúd legfelső, A pontjában rögzítettük, a másik végére m tömegű pontszerűnek tekinthető testet erősítve ingát készítettünk. A fonalat feszesen tartva az inga nehezékét az A ponttal azonos magasságba emeljük, majd onnan kezdősebesség nélkül elengedjük. A fonalat kezdetben feszültségmentesnek tekinthetjük, és feltehetjük, hogy az ingatest a rúd tengelyére merőleges síkban mozog. A továbbiakban az ingatestet részecskének fogjuk nevezni. A nehézségi gyorsulás g.

---

[1] A részpontszámokat azok kedvéért közöljük, akik – későbbi versenyekre készülve – az olimpiához hasonló feltételek mellett önállóan akarják megoldani a feladatokat. A „hivatalos” megoldást és a mérési feladatot a KöMaL novemberi számában ismertetjük.
A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

1. ábra

Legyen O a koordináta-rendszerünk origója! Amikor a részecske a P pontban van, a fonál a hengerfelület Q pontbeli érintőjével egyirányú. A QP szakasz hosszát s-sel jelöljük. A Q pontbeli érintő irányú egységvektort jelölje $\hat{\mathbf{t}}$, a sugár irányú egységvektort pedig $\hat{\mathbf{r}}$. Az OQ sugár szögelfordulása θ, melyet az OA függőleges x tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban tekintjük pozitívnak.

Amikor $\theta = 0$, az s távolság nagysága L, és a részecske gravitációs potenciális energiája, U legyen nulla. A részecske mozgása során az időben változó θ és s mennyiségek változási sebességét jelölje $\dot{\theta}$ és $\dot{s}$. Hacsak nem jelezzük másként, valamennyi sebességet a rögzített O pontra vonatkoztatjuk.

A. Ebben a részben a részecske mozgása során a fonál végig feszes marad. A fentebb bevezetett mennyiségek (vagyis s, θ, $\dot{s}$, $\dot{\theta}$, R, L, g, $\hat{\mathbf{t}}$ és $\hat{\mathbf{r}}$) segítségével fejezzük ki:

a) $\dot{\theta}$ és $\dot{s}$ közötti kapcsolatot (*0,5 pont*).
b) A mozgó Q pont O ponthoz viszonyított sebességvektorát (*0,5 pont*).
c) A P pontban levő részecske Q ponthoz viszonyított $\mathbf{v}_Q$ sebességvektorát (*0,7 pont*).
d) A P pontban levő részecske $\mathbf{v}$ sebességvektorát az O ponthoz viszonyítva (*0,7 pont*).
e) A P pontban levő részecske O pontra vonatkoztatott gyorsulásának komponensét (*0,7 pont*).
f) A P pontban levő részecske U gravitációs potenciális energiáját (*0,5 pont*).
g) A részecske sebességének v_m nagyságát a pályájának legalacsonyabb pontjában (*0,7 pont*).

B. Ebben a részben az L és R mennyiségek aránya legyen

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} \approx 6{,}886.$$

h) Adjuk meg a részecske sebességének nagyságát (g és R függvényében) abban a helyzetben, amikor a QP fonalhossz a legrövidebb, de a fonal még nem lazult meg (*2,4 pont*).

i) Mekkora a rúd túlsó oldalára átlendült részecske sebessége (g és R függvényében) a pályájának ottani legmagasabb, H pontjában (*1,9 pont*)?

C. Ebben a részben az m tömegű nehezékkel rendelkező inga fonalának felső végét nem rögzítjük az A ponthoz, hanem a fonalat a rúd tetején átvetve a végét egy nehezebb, M tömegű súlyhoz kapcsoljuk, az *2. ábrán* látható módon. A súly ugyancsak pontszerűnek tekinthető. Kezdetben az ingatestet az A ponttal azonos magasságban tartjuk, a másik oldalon a súly az O pontnál mélyebben helyezkedik el, a fonál feszes, és a vízszintes részének hossza L. Ezután az ingatestet kezdősebesség nélkül elengedjük, és a súly is süllyedni kezd. Feltehetjük, hogy az ingatest mindvégig egy függőleges síkban mozog, és át tud lendülni a lefelé mozgó súly mellett, anélkül, hogy egymás mozgását megzavarnák. A rúd felülete és a fonal közötti csúszási súrlódás elhanyagolható, a tapadó súrlódásról viszont feltesszük, hogy az elegendően nagy, és emiatt az egyszer megálló súly nem tud ismét megmozdulni, nyugalomban kell maradjon.

2. ábra

2. ábra

j) Tegyük fel, hogy a súly D nagyságú függőleges elmozdulás után valóban megáll, és hogy $(L - D) \gg R$. Ahhoz, hogy az ingatest a rúd körül teljesen körbefordulhasson, vagyis $\theta = 2\pi$ lehessen, méghozzá úgy, hogy a fonál mindkét ága egyenes maradjon, az szükséges, hogy az $\alpha = D/L$ hosszúságarány ne legyen kisebb egy bizonyos kritikus α_{k} értéknél.

Elhanyagolva az R/L nagyságrendű, vagy ennek magasabb hatványait tartalmazó kicsiny tagokat, adjunk becslést $\alpha_{\rm k}$ nagyságára az M/m tömegaránnyal kifejezve (*3,4 pont*)!

2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

Tekintsünk egy homogén, A keresztmetszetű rudat, melynek mechanikai feszültségektől mentes állapotban a hossza ℓ (*3. ábra*).

3. ábra

Ha a rúd két végén azonos nagyságú, de ellentétes irányú, a felületre merőleges F erő hat, a rúd hossza $\Delta\ell$-lel megváltozik. A T *mechanikai feszültséget* a rúd végein az F/A képlet definiálja. A rúd hosszának relatív megváltozását, azaz $\Delta\ell/\ell$-t deformációnak nevezzük, és S-sel jelöljük. A mechanikai feszültség és a deformáció segítségével a Hooke-törvényt a következő alakban is felírhatjuk:

$$T = Y\,S \qquad \text{vagy} \qquad \frac{F}{A} = Y\,\frac{\Delta\ell}{\ell}, \tag{1}$$

ahol Y a rúd anyagának *Young-modulusa.* Jegyezzük meg, hogy T *nyomó* feszültség, ha $F < 0$ és a rúd hossza csökken (azaz $\Delta\ell < 0$). Az ilyen feszültség tehát negatív, és értéke a p nyomás (-1)-szerese: $T = -p$. Egy homogén, ϱ sűrűségű rúdban a longitudinális hullámok terjedési sebessége (azaz a hangsebesség) a következő képlettel adható meg:

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\varrho}}. \tag{2}$$

(A feladat megoldása során minden csillapítás és elnyelődés elhanyagolható.)

A. *Mechanikai tulajdonságok*

Egy homogén, egyik irányban végtelen rúd (kiterjedése $x = 0$-tól ∞-ig tart), sűrűsége ϱ. A rúd kezdetben nyugalomban van és feszültségmentes. A rúd bal felületére az $x = 0$ helyen egy nagyon rövid Δt ideig állandó, kicsiny p nyomás hat, és ezzel elindít egy u sebességgel jobbra haladó nyomáshullámot (*4. ábra*).

4. ábra

4. ábra

a) Mekkora ez alatt a Δt idő alatt az S deformáció és a p nyomás a rúd bal oldali felületénél, ha a dugattyú a rúd bal oldali felületét állandó v sebességgel mozgatja (*4. ábra*)? A választ ϱ, u és v függvényében kell megadni (*1,6 pont*)!

5. ábra

5. ábra

b) Tekintsünk egy longitudinális hullámot, amely x irányban terjed a rúdban! Jelöljük a rúd feszültségmentes állapotában x helyen levő keresztmetszetének t időpontbeli elmozdulását $\xi(x,t)$-vel (*5. ábra*), és tételezzük fel, hogy

(3)
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

ahol ξ_0 és k állandók. Határozd meg a megfelelő $v(x,t)$ sebességet, $S(x,t)$ deformációt és $p(x,t)$ nyomást x és t függvényében (*2,4 pont*)!

B. *Elektromechanikai tulajdonságok (beleértve a piezoelektromos hatást)*

Tekintsünk egy hasáb alakú kvarckristályt, amelynek hossza b, vastagsága h és szélessége w (*6. ábra*)! A hossza x tengely irányú, vastagsága pedig z tengely irányú. Az alsó és a felső felületén vékony fémbevonat segítségével elektromos kontaktusokat alakítottak ki. Az elektromos vezetékek, amelyek egyben tartószerkezetként is szolgálnak (*7. ábra*) a kontaktusok közepére vannak forrasztva, ezért az x irányú longitudinális rezgések során ezek a pontok nyugalomban kell maradjanak.

6. ábra

6. ábra

7. ábra

A vizsgált kvarckristály sűrűsége $\varrho = 2{,}65 \cdot 10^3$ kg/m^3, Young-modulusa pedig $Y = 7{,}87 \cdot 10^{10}$ N/m^2. A hasáb hossza $b = 1{,}00$ cm, a w szélességre és a h vastagságra pedig $h \ll w \ll b$ teljesül. A K kapcsoló nyitva van, és feltételezzük, hogy csak x irányú longitudinális módusú állóhullámok gerjesztődnek a kvarc hasábban.

Egy $f = \omega/(2\pi)$ frekvenciájú állóhullámban a $\xi(x,t)$ elmozdulás a következő alakba írható:

$$\xi(x,t) = 2\xi_0\, g(x) \cos\omega t, \qquad (0 \le x \le b), \tag{4a}$$

ahol ξ_0 egy pozitív konstans, a $g(x)$ helyfüggő tényező

$$g(x) = B_1 \sin k\left(x - \frac{b}{2}\right) + B_2 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) \tag{4b}$$

alakú, $g(x)$ maximális értéke 1 és $k = \omega/u$. Ne felejtsd el, hogy az elektromos kontaktusok közepe nyugalomban van, és hogy a hasáb bal és jobb vége szabad, a mechanikai feszültség (vagy a nyomás) értéke ezeken a helyeken nulla kell legyen!

c) Határozd meg a (4*b*) képletben szereplő B_1 és B_2 állandók értékét, ha a kvarc hasábban egy longitudinális állóhullám alakul ki (*1,2 pont*)!

d) Mekkora az a két legkisebb frekvencia, amelyen longitudinális állóhullám gerjeszthető a kvarc hasábban (*1,2 pont*)?

A *piezoelektromos hatás* a kvarckristály speciális tulajdonsága. A kristály összenyomása vagy megnyújtása elektromos feszültséget hoz létre a kristályban, és fordítva, a kristályra kapcsolt külső elektromos feszültség vagy megnyúlást, vagy összehúzódást okoz, a polaritástól függően. Így a mechanikai és az elektromos rezgések csatolódhatnak és rezonálhatnak a kvarckristályban.

Legyen a felső és az alsó elektromos kontaktus elektromos töltéssűrűsége $-\sigma$, illetve $+\sigma$, ha a kvarc hasábban E nagyságú, z irányú elektromos tér van! Jelölje a hasáb x irányú deformációját és mechanikai feszültségét S, illetve T! Ekkor a piezoelektromos hatás a kvarckristályban a következő egyenletrendszerrel írható le:

$$S = (1/Y)T + d_p E, \tag{5a}$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E, \tag{5b}$$

ahol $1/Y = 1{,}27 \cdot 10^{-11}$ m^2/N a Young-modulus reciproka állandó elektromos tér esetén, $\varepsilon_T = 4{,}06 \cdot 10^{-11}$ F/m a dielektromos állandó konstans mechanikai feszültség esetén, $d_p = 2{,}25 \cdot 10^{-12}$ m/V pedig a piezoelektromos együttható.

Legyen most a *6. ábrán* látható K kapcsoló zárva! Ekkor $U(t) = U_\mathrm{m} \cos \omega t$ elektromos váltófeszültség jelenik meg a kontaktusokon, és a kvarc hasábban homogén, $E(t) = U(t)/h$ nagyságú, z irányú elektromos tér keletkezik. Az állandósult állapot kialakulása után a hasábban egy x irányú, ω körfrekvenciájú longitudinális állóhullám figyelhető meg.

Mivel E homogén, a λ hullámhossz és a hasábban lévő állóhullámok f frekvenciája között továbbra is érvényes a $\lambda = u/f$ összefüggés, ahol u értékét a (2) egyenlet adja meg. A $T = YS$ összefüggés azonban most már nem érvényes, mint ahogy azt az (5*a*) egyenlet is mutatja. Ugyanakkor a deformáció és a mechanikai feszültség definíciója változatlan, a hasáb végei pedig továbbra is szabadok, nulla mechanikai feszültséggel.

e) Az (5*a*) és az (5*b*) egyenletek figyelembevételével a σ felületi töltéssűrűség az alsó elektromos kontaktuson x és t függvényében

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right] \frac{U(t)}{h}$$

alakú lesz, ahol $k = \omega/u$. Vezesd le a fenti D_1 és D_2 mennyiségeket megadó összefüggéseket (*2,2 pont*)!

f) Az alsó kontaktuson lévő teljes $Q(t)$ elektromos töltés az $U(t)$ feszültségtől a

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2\left(\frac{2}{kb}\,\mathrm{tg}\,\frac{kb}{2} - 1\right)\right] C_0\, U(t).$$

képlet szerint függ. Vezesd le a kifejezésben szereplő C_0 és α^2 mennyiségeket megadó összefüggéseket, valamint α^2 numerikus értékét (*1,4 pont*)!

3. feladat.[2]

A rész: Neutrínótömeg és neutronbomlás

Egy m_n nyugalmi tömegű, a laboratóriumi koordináta-rendszerben álló, szabad neutron el tud bomlani három, egymással kölcsönhatásban nem álló részecskére: egy protonra, egy elektronra és egy antineutrínóra. A proton nyugalmi tömege m_p, az antineutrínó m_ν nyugalmi tömegéről pedig feltesszük, hogy nem nulla, de sokkal kisebb, mint az elektron m_e nyugalmi tömege. A vákuumbeli fénysebességet jelölje c. A mért értékek a következők:

$$m_\mathrm{n} = 939{,}565\,63\ \mathrm{MeV/c^2}, \quad m_\mathrm{p} = 938{,}272\,31\ \mathrm{MeV/c^2}, \quad m_\mathrm{e} = 0{,}510\,990\,7\ \mathrm{MeV/c^2}.$$

A továbbiakban minden energia és sebesség a laboratóriumi rendszerben értendő. Legyen a bomlás során keletkező elektron teljes energiája E.

a) Határozd meg az E energia legnagyobb lehetséges E_max értékét és az antineutrínó v_m sebességét abban az esetben, amikor $E = E_\mathrm{max}$! Mindkét választ a részecskék nyugalmi tömegei és a fénysebesség segítségével kell megadnod. Felhasználva, hogy $m_\nu < 7{,}3$ eV/c^2, számítsd ki numerikusan E_max és v_m/c értékét 3 értékes tizedesjegy pontossággal (*4 pont*)!

[2] Ez a feladat két független részből áll.

B rész: Lebegtetés fénnyel

Egy R sugarú, m tömegű átlátszó üveg félgömb törésmutatója n. A félgömbön kívül a közeg törésmutatója 1-gyel egyenlő. A félgömb sík lapjának középső részére, a felületre merőlegesen egyenletes eloszlású monokromatikus, párhuzamos lézerfény-nyaláb esik, a *8. ábrán* látható módon. A nehézségi gyorsulás $\mathbf{g}$, függőlegesen lefelé mutat. A kör keresztmetszetű lézernyaláb δ sugara sokkal kisebb, mint R. Mind az üveg félgömb, mind pedig a lézernyaláb a z tengelyre nézve hengerszimmetrikus.

8. ábra

Az üveg félgömb semennyit nem nyel el a lézerfényből. A felületét egy átlátszó anyag megfelelő vékonyrétegével vonták be, oly módon, hogy az üvegbe belépő és az onnan kilépő fény visszaverődése elhanyagolhatóan kicsi legyen. A visszaverődésmentes felületi rétegen áthaladó lézerfény optikai úthossza ugyancsak elhanyagolható.

b) Elhanyagolva a $(\delta/R)^3$ és még magasabb hatványú tagokat, határozd meg, hogy mekkora P lézerteljesítmény szükséges az üveg félgömb súlyának kiegyensúlyozásához (*4 pont*)!

Útmutatás: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, ha $\theta \ll 1$.