Első forduló
Budapest, 2003. május 5.
Elméleti feladatok

1. feladat. Gázrakéta. Az űrben – minden égitesttől távol – lebeg egy nagyméretű, gömb alakú űrszonda. Fala igen vékony, de erős, és jó hőszigetelő. A szondában normál állapotú levegő van ($p_0 \approx 10^5$ Pa, $\varrho_0 \approx 1{,}3$ kg/m^3). Az űrszonda falának tömege sokkal kisebb, mint a szondában levő összes levegő tömege.

A szonda falán egy kicsiny nyílás (fúvóka) található, melyen keresztül a levegő irányítottan, a falra merőlegesen eltávozhat a világűrbe. (A nyílás mérete sokkal nagyobb, mint a gázmolekulák szabad úthossza, emiatt a kiáramló gáz folyadékként viselkedik.)

a) Határozzuk meg a kiáramló gáz sebességét (az űrszondához viszonyítva) a gáz sűrűségének és a nyomásának függvényében! (A levegő belső súrlódása elhanyagolható.) (*1 pont*)

b) Adjuk meg a levegő nyomásának változását a levegő sűrűségének függvényében! (*2 pont*)

c) Adjuk meg az űrszondából egységnyi idő alatt távozó gáz tömegét a levegő sűrűségének függvényében! (*1 pont*)

d) Adjuk meg a levegő sűrűségének időegységenkénti változását a levegő pillanatnyi sűrűségének függvényében! (*1 pont*)

e) Írjuk le a szonda mozgását abban az inerciarendszerben, amelyben kezdetben nyugalomban volt! Adjuk meg, hogy mekkora a szonda gyorsulása, ha a levegő pillanatnyi sűrűsége ϱ. (*2 pont*)

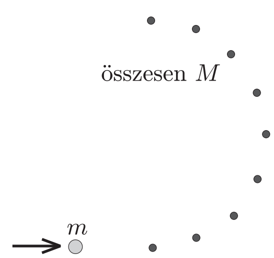
f) Fejezzük ki a szonda sebességének kicsiny megváltozását a levegő sűrűségének megváltozásával és a pillanatnyi sűrűséggel! (*1 pont*)

g) Adjuk meg numerikusan, hogy mekkora a szonda végsebessége akkor, amikor már az összes levegő eltávozott belőle! (*2 pont*)

Felhasználható matematikai összefüggés: Az $y(x) = 1/x^n$ $(n \neq 1)$ függvénynek az $a \le x \le b$ szakaszhoz tartozó görbe alatti területe $T = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{a^{n-1}} - \dfrac{1}{b^{n-1}}\right)$.

A harmadik feladat két, egymástól független részből állt, helyhiány miatt csak az egyiket ismertetjük.

3/A. feladat. Ütköző korongok. Egy jégpályán R sugarú félkör mentén egymástól egyenlő távolságban elhelyezünk N darab $(N \gg 1)$ egyforma fekete jégkorongot. A korongok össztömege M. Egy m tömegű piros korongot balról, érintő irányban nekilövünk az álló korongsornak (lásd az *ábrát*), és olyan ügyesen tesszük ezt, hogy a fekete korongokkal való rugalmas ütközések után a piros korong pontosan bal felé fog mozogni.



Feltételezhetjük, hogy az ütközések tökéletesen rugalmasak, a korongok súrlódásmentesen csúsznak, és az ütközések során nem kezdenek el forogni. A korongok mérete sokkal kisebb, mint a közöttük levő kezdeti távolság.

a) Legalább mekkora kell legyen a M/m tömegarány, hogy az ütközések a leírt módon végbemehessenek? (*2 pont*)

b) Eredeti sebességének hány százalékára csökken a piros korong sebessége, ha a tömegarány éppen az előző alkérdésben szereplő határesetnek megfelelő? (*3 pont*)

Hasznos matematikai összefüggés: $n \gg 1$ esetén $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \approx e \approx 2{,}718$.