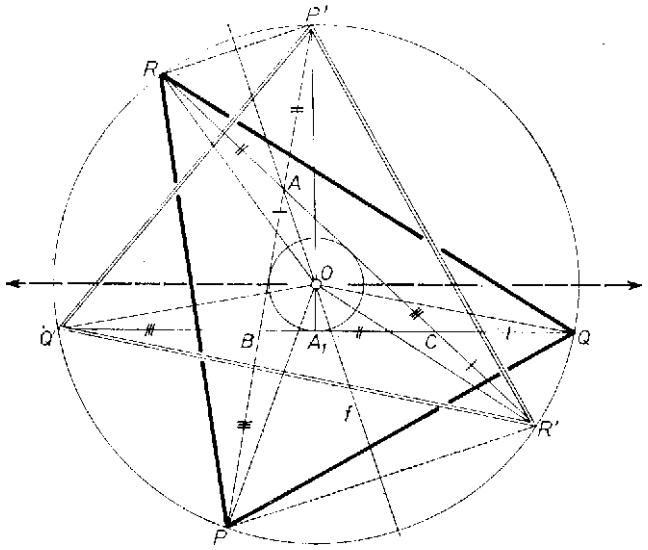
A feladat olyan O pont létezésének bizonyítását kívánja, amelyre egyrészt

$$OP' = OP, \qquad OQ' = OQ \qquad \text{és} \qquad OR' = OR, \tag{1}$$

másrészt egyenlők azok az elfordulások is – az irányt is figyelembe véve, amelyek az OP' félegyenest az OP félegyenesbe és hasonlóan OQ'-t OQ-ba és OR'-t OR-be viszik át. Ekkor – a $P'OP$, $Q'OQ$, $R'OR$ irányított forgásszöget ω-val jelölve – az O körüli, ω szögű elfordítás úgy viszi át a $P'Q'R'$ „vesszős” háromszöget a PQR „vesszőtlen” háromszögbe, hogy P' a P-be, Q' a Q-ba és R' az R-be jut. – Mivel így O-ként csak a PP' és QQ' (nyilvánvalóan nem párhuzamos) szakaszok felező merőlegeseinek metszéspontja jön szóba, azért legföljebb egy ilyen pont létezhet.



Megmutatjuk, hogy az állítás szerinti O pont az ABC háromszög beírt körének középpontja. A fent megkívánt egyenlőségeket abból bizonyítjuk, hogy az $OP'P$, $OQ'Q$, $OR'R$ háromszögek egyenlő szárúak és egybevágók, tehát egymásba fordíthatók O körül, mégpedig úgy, hogy vesszős pont vesszősbe jut át, vesszőtlen pedig vesszőtlenbe.

Pontjaink előállítása szerint a PP', QQ', RR' szakaszok mindegyikének hossza $AB + BC + CA$, a háromszög kerülete. Legyen QQ' felezőpontja A_1, ekkor a szokásos jelölésekre áttérve $BA_1 = Q'A_1 - Q'B = s - AC = s - b$, ezért A_1 a beírt körnek a CB oldalon való érintési pontja, tehát az O középpont rajta van QQ' felező merőlegesén, $OQ = OQ'$. Ugyanezek érvényesek a BA és CA oldalon, O valóban a beírt kör középpontja, így az OPP', OQQ', ORR' egyenlő szárú háromszögek magasságának közös hossza ϱ, a beírt kör sugara, tehát e három háromszög valóban egybevágó.

Válasszuk az eredeti háromszög betűzését úgy, hogy az A, B, C körüljárás pozitív (az órajárással ellentétes irányú) legyen, és forgassuk az OA félegyenest O körül pozitív irányban. Ez pontjainkat bármely háromszög esetében a következő ciklikus sorrendben súrolja: R, Q', B, P, R', C, Q, P', A, hiszen O az ABC háromszög belső pontja. Ehhez már csak azt kell hozzátennünk, hogy a $P'OP$, $Q'OQ$, $R'OR$ forgásszögek mindegyike kisebb 180°-nál, pl. Q'-t és Q-t a forgó félegyenes azon két helyzete között lépi át, amelyekben párhuzamos BC-vel. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Többen a következő lépésekben bizonyították az állítást: 1. a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek egybevágók úgy, hogy csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak; 2. e két háromszög körüljárása egyező (mert egyezik az A, B, C körüljárással).

Ennyi valóban elegendő ahhoz, hogy a sík bármely két háromszöge átfordítható legyen egymásba. Esetünkben viszont sok is, mert jelentősen könnyít az, hogy a 6 pont ugyanazon a körön van rajta.

2. Nem látszik ki a fönti megoldásból, honnan sejtettük meg, hogy a beírt kör középpontja lesz a keresett forgási középpont. Ezt pótoljuk.

A szerkesztés szerint az AB és AC félegyeneseken $AP = AB + BP = CR' + AC = AR'$, ezért P és R' egymás tükörképei a BAC szög f felezőjére, és ugyanez következik P'-re és R-re $AR = BC = AP'$-ből. Ezek következtében P, R, P' és R' egy szimmetrikus, vagyis körbe írt trapéz pontjai, csak ennek a körnek (az f-en levő) középpontja lehet a megoldás. Hasonlóan adódik Q és Q' figyelembevételével, hogy a forgási centrum az ABC háromszög még egy szögfelezőjén is rajta van.