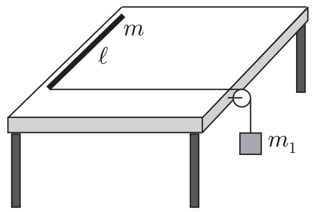
Holics László

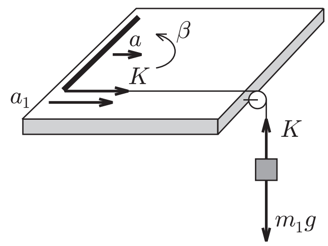
I. kategória

1. feladat. *Vízszintes asztalra ℓ hosszúságú, m tömegű homogén lécet fektetünk. A léc egyik végéhez a lécre merőleges helyzetű, csigán átvetett fonalat erősítünk, amelyre m_1 tömegű nehezéket akasztunk. A csiga tömege és a súrlódás mindenhol elhanyagolható.*



1. ábra

a) A léc melyik pontjának nem lesz gyorsulása a nehezék elengedésének pillanatában?



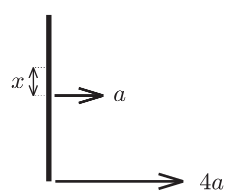
2. ábra

b) Milyen tömegaránynál lesz a léc középpontjának gyorsulása maximális a nehezék elengedésének pillanatában? Mekkora ez a gyorsulás? () *(Jurisits József)*

Megoldás. *a)* A középpont gyorsulását a-val, a kerületi pont gyorsulását a_1-gyel, a szöggyorsulást β-val jelölve a kezdeti pillanatban a következő összefüggések érvényesek:

$$m_1g - K = m_1a, \qquad K = ma,$$
$$K \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{12}m\ell^2 \cdot \beta, \qquad \beta \cdot \frac{\ell}{2} = a_1 - a.$$

Az egyenletrendszer megoldásából



3. ábra

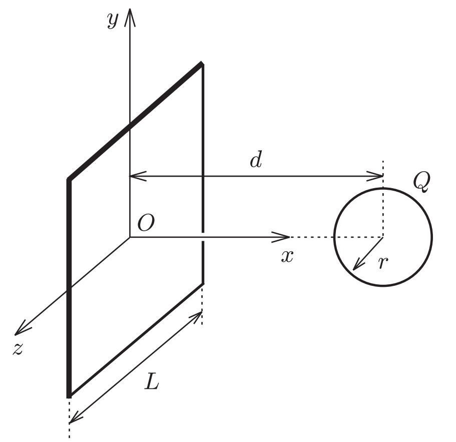
$$a = \frac{g}{4 + \frac{m}{m_1}}, \qquad a_1 = 4a, \qquad \beta = \frac{6a}{\ell}.$$

A középpont túlsó oldalán lévő pontok tangenciális gyorsulása hátrafelé irányul. A középponttól x távolságra lévő pontnak akkor nincs gyorsulása, ha a tangenciális gyorsulás egyenlő nagyságú a középpont gyorsulásával:

$$x \cdot \beta = a, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{\ell}{6}.$$

b) A középpont korábban kiszámított gyorsulása $m \ll m_1$ esetén a legnagyobb, nevezetesen

$$a_{\max} = \frac{g}{4}.$$



4. ábra

2. feladat. *Egy L oldalú, elhanyagolható vastagságú, nagy, négyzetes szigetelő lemez* 100 Q *töltéssel egyenletesen fel van töltve. Legyen a lemez síkja az x–y sík! Egy r sugarú, Q töltéssel egyenletesen töltött vékonyfalú, belül üres szigetelő gömb középpontja a síkkal szemben a $(d, 0, 0)$ pontban helyezkedik el. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömb belső pontjaiban és a $(d/2, d/2, 0)$ pontban! Legyen $L = 100\,d$ és $r = d/5$. Az eredményt Q, d és az ε_0 dielektromos állandó kifejezéseként adjuk meg!*

() *(Varga Zsuzsa)*

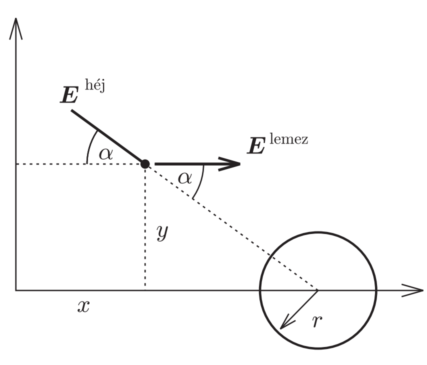
Megoldás. A lemeztől származó térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E_x^{\text{lemez}} = 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}, \quad (x > 0), \qquad E_y^{\text{lemez}} = 0.$$

A feltöltött gömb által létrehozott elektromos mező a gömb belsejében nulla, rajta kívül pedig olyan, mintha egy Q nagyságú ponttöltés lenne a gömb középpontjában (Gauss-törvény).

a) A gömb belső pontjaiban az eredő térerősség:

$$E_x = 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = 0.$$



5. ábra

b) A gömbön kívül a kérdéses pontban az eredő térerősség:

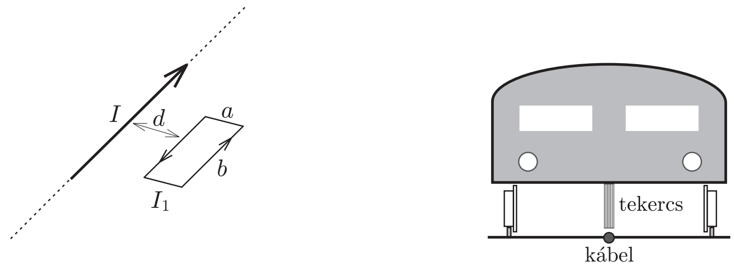
$$E_x = E_x^{\text{lemez}} - E_x^{\text{héj}} \cdot \cos 45^\circ = -0{,}107\,\frac{Q}{\varepsilon_0 d^2},$$
$$E_y = E_y^{\text{héj}} \cdot \sin 45^\circ = -0{,}113\,\frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}.$$

Ez a vektor

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 0{,}156\,\frac{Q}{\varepsilon_0 d^2}$$

nagyságú, és a negatív x tengellyel 46,6°-os szöget zár be.

3. feladat. *Egy merev, téglalap alakú vezető hurok síkjában a hosszabbik oldallal párhuzamosan nagyon hosszú,* 10 A *erősségű áramot szállító egyenes vezeték helyezkedik el. A téglalap oldalai $a =$* 0,2 m, *$b =$* 0,3 m, *a benne folyó* *áram erőssége* 1 A. *Az egyenes vezeték a huroktól* 0,25 m *távolságra van. Határozzuk meg a keretre ható eredő erő irányát és nagyságát!*



6. ábra

Ez az elrendezés használatos az ún. mágneses lebegtetésű vonat megvalósításánál. Sok-sok függőleges síkú hurok (egy négyszögletes tekercs) van elhelyezve minden kocsiban pontosan a vágány közepén futó kábel felett. A kocsi és a tekercs azonos b hosszúságú. A kocsi egységnyi hosszra eső tömege m kg/m. Ha $d = 1$ cm, $m = 100$ kg/m és a vágánybeli kábel és a tekercs árama egyaránt 100 A, hány menetesnek kell lennie a tekercsnek, ha $a \gg d$?

() *(Varga Zsuzsa)*

Megoldás. A mágneses indukció nagysága az egyenes vezetőtől x távolságban (a rajz síkjába befelé)

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}.$$

A téglalap alakú vezető hurok egyes darabkáira ható erő az $\mathbf{F} = I_1 \mathbf{l} \times \mathbf{B}$ képlet alapján számítható. A BA és a DC szakaszokon ható erők kiejtik egymást, így

$$F^{\text{eredő}} = F_{AD} - F_{CB} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_1 b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}\right) = 1{,}067 \cdot 10^{-6}\ \text{N}.$$

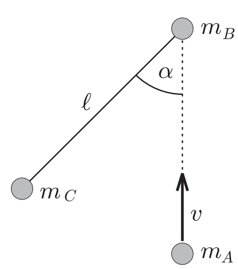
Az N menetes tekercset tartalmazó vonat lebeg a sínen, ha (kihasználva, hogy $a \gg d$)

$$mgb = NF^{\text{eredő}} \approx \frac{N\mu_0 I I_1 b}{2\pi d}.$$

Ebből a megadott számadatokkal $N \approx 500$ menet adódik.

II. kategória

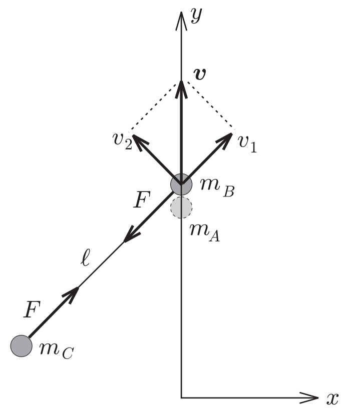
1. feladat. *Három azonos tömegű és méretű ($m_A = m_B = m_C = m$) lapos korong nyugszik vízszintes sima lapon. A B és C korong vékony, $\ell = 1$ m hosszú fonállal van összekötve. A fonál kezdetben laza, de egyenes, iránya 45°-os szöget zár be az A és B korongok közepét összekötő egyenessel. Az A korongot $v = 2$ m/s sebességgel meglökjük úgy, hogy a B koronggal centrálisan ütközzön. Az ütközések abszolút rugalmasak és pillanatszerűek.*



7. ábra

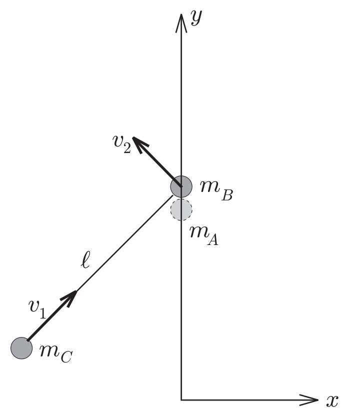
Az A és B korongok ütközésétől számítva mennyi idő múlva lesz a B és C korongok középpontját összekötő egyenes párhuzamos az A korong pályájával? Milyen távol lesz ekkor az A korongtól a B és C korong? (Tekintsük a korongokat pontszerűeknek!)

() *(Holics László)*



8. ábra

Megoldás. A folyamatban két rugalmas ütközés megy végbe. Az első ütközés során (tömegük egyenlősége miatt) az A és B korongok „sebességet cserélnek", az A korong megáll, B pedig v sebességgel megindul.



9. ábra

Vizsgáljuk a B és C korongból álló rendszer további mozgását! A második rugalmas ütközés akkor következik be, amikor a fonál hirtelen megfeszül, és megrántja a végeihez kötött két korongot; egyenlő F nagyságú, de ellentétes irányú erőlökést adva nekik. Ez az erőlökés a fonálra merőleges sebességkomponenseket nem tudja megváltoztatni (tehát a *8. ábrán* látható jelölésekkel azok nagysága $v_2 = v/\sqrt{2}$ és nulla marad), a fonállal párhuzamos sebességkomponensek pedig (mivel a korongok tömege megegyezik) kicserélődnek (*9. ábra*). A második ütközés után tehát mindkét test sebességének nagysága ugyanakkora:

$$u_B = u_C = v\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de a sebességük iránya egymásra merőleges. Válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek y tengelye a $\mathbf{v}$-vel (az A korong pályájával) párhuzamos, ebben a második ütközésben részt vevő testek sebessége az ütközés után:

$$u_{By} = -u_{Bx} = v/2,$$

illetve

$$u_{Cy} = u_{Cx} = v/2,$$

tehát mindkét test az y tengellyel 45°-os szöget bezáró irányban mozog.

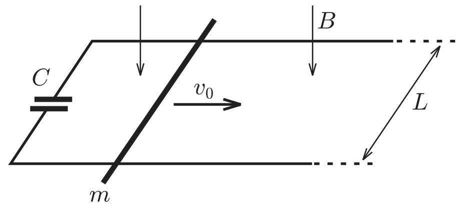
A második ütközés (a fonál által kifejtett erőlökés) után a fonál azonnal meglazul, és mindkét korong erőmentesen, egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A két korongot összekötő egyenes akkor lesz párhuzamos az y tengellyel (az A korong korábbi sebességével), amikor B is és C is megteszi $v/2$ sebességgel az $\ell\sqrt{2}/4$ nagyságú „x irányú" távolságot. Ez a pillanat az A-val való ütközés után

$$t = \frac{\ell}{v} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}35\ \mathrm{s}$$

múlva következik be. Ekkor mind az A, mind pedig a B korong $\ell/2 = 0{,}5$ m távolságban lesz az A korongtól, egymástól mért távolságuk pedig $\ell\sqrt{2}/2 = 0{,}71$ m.

2. feladat. *Két párhuzamos, egymástól L távolságra futó vízszintes fémsín egyik végét C kapacitású, kezdetben töltetlen kondenzátorral zárjuk le. A sínpár időben állandó, függőleges irányú, B indukciójú homogén mágneses mezőben* *van. A sínpárra merőlegesen egy R ellenállású, m tömegű vezető rudat fektetünk, amit v_0 sebességgel meglökünk. Mekkora sebességre lassul le a rúd, ha a sín elegendően hosszú, és a mágneses tér is kellően kiterjedt? (A sín elektromos ellenállása, a súrlódás és az önindukciós hatások elhanyagolhatók.)*

() *(Szegedi Ervin)*



10. ábra

Megoldás. A rúd indítását követően a mozgási indukció jelensége miatt feszültség indukálódik, indukált áram folyik, és a kondenzátor elkezd feltöltődni. A pillanatnyi áramerősséget az indukált feszültség és a kondenzátor feszültsége határozza meg:

$$R\,i(t) = BLv(t) - \frac{Q(t)}{C}.$$

A mágneses térben mozgó, áramjárta rúdra fékező mágneses erő hat, ezért a rúd sebessége csökken. Ez a sebességcsökkenés mindaddig tart, amíg áram folyik, azaz amíg az indukált feszültség és a kondenzátor feszültsége „ki nem oltja" egymást:

(1) $$BLv_{\mathrm{min}} = \frac{Q_{\mathrm{max}}}{C}.$$

A dinamika alaptörvénye alapján

$$m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = -BiL,$$

ahonnan $i\,\Delta t = \Delta Q$ felhasználásával

$$m\,\Delta v = -BL\,\Delta Q.$$

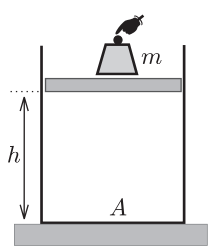
Ha az indulástól a sebesség állandósulásáig elemi részekre osztjuk a mozgást, és a fenti összefüggést minden részre felírjuk, majd azokat összegezzük

$$m\big(v_{\mathrm{min}} - v_0\big) = -BL\,\Delta Q_{\mathrm{max}}$$

adódik. Ebből (1) felhasználásával

$$v_{\mathrm{min}} = \frac{m}{m + (BL)^2 C}\,v_0.$$

3. feladat. *Egy $A = 1\ \mathrm{dm}^2$ alapterületű, függőlegesen álló hengerben lévő levegőt elhanyagolható tömegű, súrlódásmentesen mozgó dugattyú zár el a külső levegőtől. A levegőoszlop magassága $h = 5$ dm. A dugattyúra óvatosan egy $m = 14$ kg tömegű nehezéket helyezünk, majd elengedjük azt. A dugattyú és a nehezék kis amplitúdójú, jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgásba kezd. Határozzuk meg a rezgés amplitúdóját, frekvenciáját és a dugattyú maximális sebességét!*



11. ábra

(A henger fala hőszigetelőnek tekinthető. A külső légnyomás $p_{\mathrm{k}} = 100$ kPa. Szükség esetén használjuk a következő közelítést: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, ha x nullához közeli érték.)

() *(Szegedi Ervin)*

Megoldás. Ha a dugattyú–teher rendszer a kiindulási helyzetből x távolsággal elmozdul lefelé, akkor a rá ható eredő erő

(1) $$F(x) = mg - (p - p_{\mathrm{k}})A,$$

ahol p a levegő megnövekedett nyomása. Mivel az állapotváltozás adiabatikus, és a bezárt gáz térfogata a levegőoszlop magasságával arányos:

$$p_\mathrm{k} \cdot h^\kappa = p \cdot (h-x)^\kappa,$$

azaz

$$p = p_\mathrm{k} \left(\frac{h}{h-x}\right)^\kappa \approx p_\mathrm{k}\left(1+\kappa\frac{x}{h}\right). \tag{2}$$

(1) és (2) összevetésével a dugattyú–teher rendszerre ható eredő erő

$$F(x) = mg - \frac{\kappa A\, p_\mathrm{k}}{h}\, x.$$

Ezt a kifejezést $F(x) = -D(x-x_0)$ alakban is írhatjuk, ahol

$$D = \frac{\kappa A\, p_\mathrm{k}}{h} = 2800\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \text{és} \quad x_0 = \frac{mgh}{\kappa A p_\mathrm{k}} = 5\ \mathrm{cm}.$$

Ez az erőtörvény – a függőleges rugóra akasztott test példájához hasonlóan – x_0 egyensúlyi helyzet körüli harmonikus rezgőmozgást ír le. Mivel a test a rezgés szélső helyzetéből indult, a rezgés amplitúdója is x_0, tehát 5 cm. A rezgés frekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = 2{,}25\ \mathrm{Hz},$$

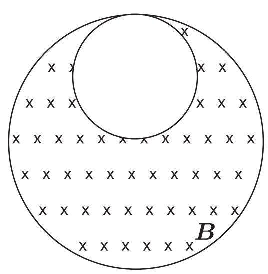
a dugattyú maximális sebessége pedig

$$v_\mathrm{max} = x_0\, 2\pi f = 0{,}71\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

III. kategória

Az **1.** és **3. feladat** megegyezik a II. kategória megfelelő feladatával.

2. feladat. *Egy $R = 10$ cm sugarú, hosszú henger belsejében egy vele párhuzamos tengelyű, $R/2$ sugarú kisebb henger helyezkedik el, ami belülről érinti a nagyobb hengert. A kisebb hengerben nincs mágneses mező, a nagyobb henger maradék részében időben egyenletesen változó, homogén eloszlású mágneses mező van. Az indukció változási gyorsasága $\Delta B/\Delta t = 80\ \mathrm{V/m^2}$. A mágneses indukció párhuzamos a henger tengelyével.*



12. ábra

Határozzuk meg az indukált elektromos mező térerősségét a kisebb henger belsejében! () *(Szegedi Ervin)*

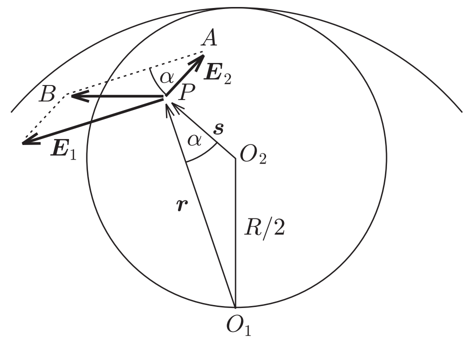
Megoldás. Ha a nagyobb hengert teljesen kitöltené a változó mágneses mező, akkor a belsejében a tengelyétől r távolságban ($r \le R$) az indukált elektromos mező a szimmetria miatt „érintőleges”, és nagyságát az indukciótörvény határozza meg:

$$2r\pi \cdot E = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot r^2\pi, \quad \text{azaz} \quad E = \frac{r}{2}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Képzeljük el, hogy a feladatban szereplő mágneses mező úgy jön létre, hogy két, időben változó mágneses mező szuperponálódik:

(i) egy egyenletesen változó, homogén $\boldsymbol{B}(t)$ tér, ami a nagy hengert teljesen kitölti, és

(ii) egy $-\boldsymbol{B}(t)$-vel jellemezhető mező, ami csak a kis henger belsejében van.



13. ábra

A kis henger valamely P belső pontja legyen a nagy henger O_1 középpontjától r távolságra, a kis henger O_2 középpontjától s távolságra, és a megfelelő vektorokat jelöljük $\boldsymbol{r}$-rel, illetve $\boldsymbol{s}$-sel (lásd a *13. ábrát*). Ekkor P-ben az indukált $\boldsymbol{E}$ elektromos mező két indukált térerősségből szuperponálható: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, ahol

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}r \qquad \boldsymbol{B}(t) \text{ változása miatt,}$$
$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}s \quad -\boldsymbol{B}(t) \text{ változása miatt.}$$

Mivel $\boldsymbol{E}_1 \perp \boldsymbol{r}$ és $\boldsymbol{E}_2 \perp \boldsymbol{s}$, az O_2PO_1 és a PAB háromszögeknek van egy közös szöge (α). Másrészt

$$\frac{AB}{AP} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{r}{s} = \frac{O_1P}{O_2P}$$

miatt a két háromszögben az egyenlő szöget közrefogó oldalak aránya is egyenlő, tehát a két háromszög *hasonló.* Ezért

$$\frac{BP}{AB} = \frac{E}{E_1} = \frac{O_1O_2}{O_1P} = \frac{R}{2r}, \quad \text{vagyis} \quad E = E_1 \cdot \frac{R}{2r} = \frac{R}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Másrészt $\boldsymbol{E}$ merőleges az O_1O_2 egyenesre, vagyis $\boldsymbol{E}$-nek nemcsak a nagysága, de az iránya is független a P pont helyzetétől, tehát a kisebb hengerben az indukált elektromos mező *homogén.*

A verseny végeredménye

I. kategória

1. **Sipos Barnabás** (Budapest, Trefort Ágoston Kéttannyelvű Szki., 12. évf.), tanára: Fülöp László;
2. **Szarvas Tamás** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.), tanára: Beregszászi Zoltán;
3. **Mendli Bálint** (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.), tanára: Beregszászi Zoltán;

4. *Juhász Gábor* (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., 12. évf.); **5.** *Drahos Tamás* (Miskolc, Bláthy Ottó Villamosipari Szki., 11. évf.); **6.** *Pszota Zsolt* (Vác, Boronkay György Műszaki Szki., 12. évf.); **7.** *Cserháti Sándor* (Győr, Pattantyús Géza Ipari Szki., 12. évf.); **8.** *Simon Tamás* (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 11. évf.); **9.** *Varga Gábor* (Budapest, Alternatív Közgazdasági Gimn., 12. évf.); **10.** *Koltay Szabolcs* (Budapest, Puskás Tivadar Távközlési Techn., 12. évf.).

II. kategória

1. **Siroki László** (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.), tanára: Simon Gyula;

2. **Nagy Márton** (Budapest, Piarista Gimn., 12. évf.),
   tanárai: Futó Béla;

3. **Vehovszky Balázs** (Budapest, Piarista Gimn., 11. évf.),
   tanára: Futó Béla;

4. *Balogh László* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **5.** *Nagy Zoltán Lóránt* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **6.** *Pápai Tivadar* (Barcs, Dráva Völgye Középisk., 12. évf.); **7.** *Tóth Sándor* (Csongrád, Batsányi János. Gimn., 11. évf.); **8.** *Dolgos Gergely* (Budapest, Árpád Gimn., 12. évf.),; **9.** *Rácz Éva* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.); **10.** *Kiss Demeter* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.).

III. kategória

1. **Pallos Péter** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.),
   tanára: Horváth Gábor;

2. **Nagy Szabolcs** (ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 12. évf.),
   tanára: Chikán Éva;

3. **Béky Bence** (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.),
   tanára: Horváth Gábor;

4. *Sparing Dániel* (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn., 11. évf.); **5.** *Szekeres Balázs* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 11. évf.); **6.** *Szilva Attila* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.); **7.** *Antal Ágnes* (ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn., 12. évf.); **8.** *Fejős Gergely* (ELTE Radnóti Miklós Gyak. Gimn., 11. évf.); **9.** *Harangi Viktor* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. évf.); **10.** *Szalai Bence* (Lovassy László Gimn., 12. évf.).