

1. Oldjuk meg a következő egyenletet és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

- a) $|x - 2| + |x + 3| = |(x - 2) + (x + 3)|$;
 b) $|x - 2| + |x + 3| > |2x + 1|$;
 c) $|x - 2| + |x + 3| < |2x + 1|$.

Megoldás. $|a| + |b| = |a + b|$ pontosan akkor teljesül, ha $ab \geq 0$; $|a| + |b| > |a + b|$ pontosan akkor teljesül, ha $ab < 0$, $|a| + |b| < |a + b|$ pedig soha nem teljesül. A megoldások:

- a) $(x - 2)(x + 3) \geq 0$, azaz $x \leq -3$ vagy $x \geq 2$,
 b) $(x - 2)(x + 3) < 0$, azaz $-3 < x < 2$,
 c) egyetlen x -re sem teljesül.

2. Egy húrtrapéz átlói merőlegesen egymásra. A húrtrapéz területe 16 cm^2 . Számítsuk ki a húrtrapéz magasságának, középvonalának és átlóinak hosszát. Kiszámíthatók-e az adatokból az oldalhosszúságok?

Megoldás. Az átlók merőlegességéből következik, hogy az átlók a párhuzamos oldalakkal 45° -os szöveget zárnak be. Így a trapéz magasságának hossza megegyezik a középvonal hosszával és az átló hossza a magasság hosszának $\sqrt{2}$ -szöröse. Ha a trapéz magassága m , középvonala k , átlóinak hossza e , akkor $k = m$, $e = m\sqrt{2}$, a trapéz területe $T = m^2$. Így $m^2 = 16 \text{ cm}^2$, $m = 4 \text{ cm}$, $k = 4 \text{ cm}$ és $e = 4\sqrt{2} \text{ cm}$. Végtelen sok ilyen trapéz van, így az oldalak hossza nem határozható meg.

3. Melyek azok az $(x; y; z)$ számhármások, amelyek kielégítik az $x + y = 4$, $xy = z^2 + 2z + 5$ egyenletrendszert?

Megoldás. Az első egyenletből $y = 4 - x$, így $x(4 - x) = (z + 1)^2 + 4$,

$$(1) \quad 0 = x^2 - 4x + 4 + (z + 1)^2,$$

tehát $(x - 2)^2 + (z + 1)^2 = 0$, ami pontosan akkor teljesül, ha $x = 2$, $z = -1$ és ekkor $y = 2$. Az egyenletrendszert a $(2; 2; -1)$ számhármás elégíti ki.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \quad x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \quad \quad \sin x + \cos y = \sqrt{2}. \end{array} \right\} \quad \text{b) } \quad \left. \begin{array}{l} 2 \cos x = \sqrt{2}, \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2}. \end{array} \right\}$$

Megoldás. a) Az első egyenletből $y = \frac{\pi}{2} - x$, így $\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, tehát $2 \sin x = \sqrt{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ha $x_{1,n} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, akkor $y_{1,n} = \frac{\pi}{4} - 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; ha $x_{2,k} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, akkor $y_{2,k} = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Az első egyenletből $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ vagy $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ha $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, akkor $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, így $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, vagy $y = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor a megoldások: $x_{1,k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y_{1,n} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, vagy $x_{2,k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $y_{2,n} = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Ha $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, akkor $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos y = \sqrt{2}$, tehát ekkor nincs megoldás.

5. Az első n , 3-mal osztva 2 maradékot adó szám összegét osszuk el az első n , 4-gyel osztva 1 maradékot adó szám összegével. Mekkora n , ha a hányados $\frac{8}{9}$?

Megoldás. Az n -edik pozitív egész szám, amelyik 3-mal osztva 2-t, illetve 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, a $3n - 1$, illetve a $4n - 3$. Az első n ilyen szám összege $\frac{2 + (3n - 1)}{2} \cdot n$, illetve $\frac{1 + (4n - 3)}{2} \cdot n$, a hányadosuk $\frac{3n + 1}{4n - 2}$. A feltétel szerint

$$\frac{3n + 1}{4n - 2} = \frac{8}{9}, \quad \text{tehát } n = 5.$$

6. Állapítsuk meg, hogy az m valós paraméter mely értékeire lesznek a $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ egyenlet gyökei valósak, és határozzuk meg ezekre az m értékekre az $f(m) = 2(x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1)$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ahol x_1 és x_2 az adott egyenlet megoldásai.

Megoldás. Az adott egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4m^2 - 4 \cdot 2(m^2 - 1) = 4(2 - m^2), \quad D \geq 0, \quad \text{ha } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

Mivel $x_1 + x_2 = -m$ és $x_1x_2 = \frac{m^2 - 1}{2}$, azért

$$f(m) = 2 \left(-m + \frac{m^2 - 1}{2} + 1 \right) = (m - 1)^2.$$

Mivel $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$, azért $-1 - \sqrt{2} \leq m - 1 \leq -1 + \sqrt{2}$, így $0 \leq (m - 1)^2 \leq (1 + \sqrt{2})^2$.

$f(m)$ legkisebb értéke 0, amit $m = 1$ esetén vesz fel, a legnagyobb értéke $(1 + \sqrt{2})^2$, amit az $m = -\sqrt{2}$ helyen vesz fel.

7. Igazoljuk, hogy az a, b, c oldalú háromszög c oldalával szemközti γ szög pontosan akkor (akkor és csak akkor) 120° , ha

$$4s(s - c) = ab, \quad \text{ahol} \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Megoldás. Ha $4s(s - c) = ab$, akkor $2s(2s - 2c) = ab$, azaz $(a + b + c)(a + b - c) = ab$, ahonnan $c^2 = a^2 + b^2 + ab$. A koszinusztétel alkalmazásával $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, így $-2 \cos \gamma = 1$, $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 120^\circ$.

Ha $\gamma = 120^\circ$, akkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$, azaz

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab; \quad -ab = a^2 + b^2 - c^2,$$

tehát $2ab - ab = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$, azaz

$$ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c) = 2s(2s - 2c),$$

így valóban $ab = 4s(s - c)$.

8. Az $\mathbf{n}(-1; 1)$ vektorra merőleges g egyenes az ordináta tengelyt a C , az $y = (x - 2)^2 + 1$ egyenletű parabolát az A és a B pontokban metszi. Állapítsuk meg a g egyenes egyenletét, valamint az A és B pontok koordinátáit, ha $|\overrightarrow{AB}| = 3 \cdot |\overrightarrow{AC}|$.

Megoldás. A g egyenes egyenletét $-x + y = c$ ($c \in \mathbb{R}$) alakban keressük, tehát $y = x + c$, tehát $C(0; c)$. Legyen az A , illetve a B pont abszcisszája x_1 , illetve x_2 , akkor $A(x_1; x_1 + c)$, $B(x_2; x_2 + c)$. Az A és B pontok koordinátáit az egyenes és a parabola egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, azaz x_1 és x_2 az

$$(x - 2)^2 + 1 = x + c, \quad x^2 - 5x + 5 - c = 0$$

egyenletek gyökei. A feltételből következik, hogy $AB^2 = 9 \cdot AC^2$, tehát

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 9(x_1^2 + x_1^2), \quad \text{azaz} \quad (x_2 - x_1)^2 = 9x_1^2,$$

tehát $x_2 - x_1 = 3x_1$ vagy $x_2 - x_1 = -3x_1$; $x_2 = 4x_1$ vagy $x_2 = -2x_1$. Mivel $x_1 + x_2 = 5$ és $x_1x_2 = 5 - c$, azért

$$5x_1 = 5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad 1 \cdot 4 = 5 - c, \quad c = 1,$$

vagy

$$-x_1 = 5, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 10, \quad (-5) \cdot 10 = 5 - c, \quad c = 55.$$

Ha $c = 1$, akkor a g egyenes egyenlete $y = x + 1$ és $A_1(1; 2)$, $B_1(4; 5)$. Ha $c = 55$, akkor a g egyenes egyenlete $y = x + 55$ és $A_2(-5; 50)$, $B_2(10; 65)$. Ezek valóban megoldások.