Bevezetés

Bár a „játékelmélet” szót hallva sokunknak a kaszinók világa ötlik az eszébe, ez a tudományág ma már a póker helyett gazdasági, politikai problémákkal foglalkozik. Alkalmazásainak köre a hadászattól kezdve a piaci verseny modellezésén át a környezetvédelmi egyezmények tervezéséig terjed. Olyankor alkalmazható, amikor a résztvevőknek, vagy *játékosoknak* egy jól körülírható cél érdekében döntéseket kell hozniuk, és a végeredmény a játékosok választott *stratégiáinak* (is) függvénye. Az elnevezés tehát még véletlenül sem komolytalanságra utal, hanem tudománytörténeti okokra vezethető vissza.

A legjobban modellezhető konfliktusok persze továbbra is az olyan társasjátékok, mint például a sakk, ahol egyértelmű a játékosok személye, hogy mik a szabályok és mi a játék eredménye, azaz, hogy ki nyert. Annak, aki már játszott stratégiai játékokat, például sakkozott már életében, a játékelmélet központi gondolata nem meglepő: lépéseinket a lehetséges ellenlépések figyelembevételével kell választanunk, annak tudatában, hogy ellenfelünk is mindent megtesz a győzelemért. A hagyományos játékok fontos eleme a *köztudott tudás:* nem elég, hogy mi tudunk valamit, de az ellenfél tudja, hogy tudjuk; mi tudjuk, hogy tudja, hogy tudjuk, ... és így tovább, a végtelenségig.

A briliáns magyar matematikus, Neumann János kedvelt időtöltése volt a póker. Kezdettől fogva érdekelte, hogy – ha már a lapjárást befolyásolni nem tudja, – hogyan blöfföljön. A problémát matematikai formába öntötte és ezzel megnyílt a lehetőség az elméletnek a játékokon messze túlmenő alkalmazására. Ehhez újabb lökést az *Oskar Morgensternnel* közösen publikált könyve, a „Játékelmélet és gazdasági viselkedés” adott. Bár Neumann érdeklődése a későbbiekben más területek felé fordult, ezzel a munkával egy egész tudomány alapjait vetette meg. Ezért emlegetjük a játékelmélet atyjaként.

A játékelmélet bemutatása nagy feladat, most csak néhány alapvető gondolatot tekintünk át. Először Neumann előfutárairól ejtünk szót, majd bemutatjuk a játékelméletet tulajdonképpen elindító Minimax Tételt. Ezután rátérünk az n-személyes játékokra, bemutatva a Nash-féle, avagy nemkooperatív egyensúlyt, majd a Neumann–Morgenstern-féle megoldást. Végül röviden szót ejtünk az elmélet további területeiről, alkalmazásairól.

Mit nevezünk játéknak?

Egy játék három komponensből áll: a *játékosok* a játék cselekvő résztvevői, akik beleszólnak a játék lefolyásába majd részesülnek a nyereményből. A befolyásolás módját és a játék menetét a *játékszabályok* határozzák meg. A harmadik elem a (lehetséges) nyeremények úgynevezett *hasznosságának* összehasonlítása.

Ha feltételezzük, hogy a játék nyereménye pénzben kifejezhető, akkor a cél a minél kedvezőbb *kifizetés* elérése. A játékosok ezt a célt szem előtt tartva, – természetesen a játékszabályok figyelembevételével – hozzák döntéseiket. Egy-egy döntés vonatkozhat a lépéseknek akár egész sorozatára. *Stratégiának* nevezünk egy olyan szabályrendszert, vagy szakkifejezéssel protokollt, amely pontosan egy lépést ír elő a játék minden egyes helyzetére. Mivel a tényleges játék már csak a stratégiák mechanikus követése, ha ismerjük a játékszabályokat és a játékosok stratégiáit, ismerjük az eredményt is. Célunk megtalálni a nyerő stratégiát, vagy stratégiákat és az így kialakuló egyensúlyi helyzeteket.

A játékelmélet előzményei

A játékelméleti gondolkodás első nyomai különösebb hatás nélkül merültek feledésbe. Előzménynek így aligha, legfeljebb kuriózumnak tekinthetők. Folyamatos fejlődés a XIX. századtól figyelhető meg, mikor *Antoine-Augustine Cournot,* illetve *Joseph Bertrand* alapvetően gazdasági műveikben a piaci verseny két formáját írták le. Mindkét modellre jellemző a köztudott tudás, tehát hogy a résztvevők pontosan ismerik a konkurensek termelési paramétereit. Cournot a *duopóliumot,* vagyis két termelő versenyét vizsgálva matematikailag bebizonyította egy egyensúly létezését és megmutatta, hogy a monopóliummal összehasonlítva duopóliumban az árut nagyobb mennyiségben, és alacsonyabb áron kínálják. A mai monopóliumellenes törvényeknek ez az eredmény áll a hátterében.

Neumann János közvetlen előfutárának a matematikus *Émile Borelt* tekinthetjük, aki az 1920-as években Franciaország tengerészeti minisztere is volt. A ’20-as évek elején több rövid dolgozatot publikált a stratégiai játékokról. Munkáját az ’50-es években *René-Maurice Fréchet* fedezte fel újra és rögtön a játékelmélet alapítójának kiáltotta ki. Bár Borel érdemei vitathatatlanok, képtelen volt elméletét általános formában megfogalmazni. Mi több, hamisnak sejtette a később Neumann által bebizonyított Minimax Tételt, mely nélkül az elmélet vajmi keveset ér. Sőt, Neumann szerint Borel negatív sejtése adott esetben elbátortalaníthatta volna a Minimax Tétel bizonyítása érdekében tett erőfeszítéseit.

A Minimax Tétel

	Kő	Papír	Olló
kő	0	1	-1
papír	-1	0	1
olló	1	-1	0

Tegyük fel, hogy két játékos a „kő-papír-olló” nevű véresen komoly játékot játssza. Ebben a játékban a három lehetőség valamelyikét kell egy adott jelre felmutatni és pont csak különböző választások esetén jár. A papír becsomagolja a követ, a kő kicsorbítja az ollót, az olló elvágja a papírt. Ennek megfelelően a játék lehetséges kimenetelei a mellékelt táblázatban összegezhetők. Az első játékos az oszlopok (a nagybetűs stratégiák), a második a sorok (kisbetűs stratégiák) közül választ. A kiválasztott mező az első játékos nyereményét mutatja, a második játékos ennek éppen az ellentettjét kapja.

Ez tehát a játék. Mi a nyerő stratégia? A kérdést árnyaltabban is feltehetjük: hogyan érhetik el a játékosok a legmagasabb nyereményt, illetve mennyi ez?

Mindig papírt mutatni nem tűnik célravezetőnek, hiszen ekkor az ellenfél mindig ollót mutat és így a „nyeremény” -1. Aki már játszotta ezt a játékot, tudja, hogy legjobb teljesen kiszámíthatatlannak lenni. Valóban, az optimális stratégia a három lehetőséget egyforma valószínűséggel játszani. Az ilyen stratégiát, amely több, úgynevezett *tiszta stratégia* keverékét is megengedi, *kevert stratégiának* nevezzük. A várható nyeremény ekkor 0, függetlenül az ellenfél stratégiájától.

Ez az eredmény itt kevéssé meglepő, tekintve, hogy a játék szimmetrikus a két játékosra nézve. Általában viszont már egyáltalán nem nyilvánvaló. A játéknak ugyanis két oldala van. Az első játékos az ellenfél optimális válaszát, azaz a magára nézve legrosszabb eseteket alapul véve keresi a nyerő (azaz a legjobb) stratégiát. A második játékos ugyanezt teszi, de mivel nyereményeik egymás ellentettjei, az első játékos szemszögéből nézve optimális válaszok (legjobb esetek) között a legkedvezőtlenebbet keresi. A *maximin* és a *minimax* egybeesését a Minimax Tétel mondja ki, ennek első bizonyítását Neumann János adta 1928-ban.

Ez az egybeesés kijelöl egy jól meghatározott egyensúlyi pontot is, amelyet a játék megoldásának tekintünk.

n-személyes játékok

Bár Neumannék elsősorban a kétszemélyes játékok elméletével, illetve alkalmazásaival foglalkoztak, könyvük egyik fő érdeme, hogy kiterjesztette a játékelméleti gondolkodást a kettőnél több, úgynevezett n-résztvevős játékokra. Az ilyen játék egy kétszemélyes játékhoz hasonlóan adható meg, bár a táblázat elkészítéséhez most egy n-dimenziós papírlap kellene. Lényeges különbség még, hogy míg a kétszemélyes zérus-összegű játékokban az első játékos nyereményét meghatározza a második játékosé, ehhez most $n-1$ játékos nyereményét kell ismernünk. Sőt, ha nem csak a zérus-összegű játékokra szorítkozunk, akkor valamennyi játékosét. Így a játék eredménye tulajdonképpen egy függvény, amely minden (kevert) stratégia n-eshez egy szám n-est rendel, s ezt hasznosságnak, magát a függvényt pedig hasznossági függvénynek nevezzük.

A játék lefolyása is szükségképpen más. A kétszemélyes játékokban az egyik fél kedvezőbb helyzete az ellenfél számára szükségképpen kedvezőtlenebbet jelentett. Az n-személyes játékokban egy játékos kedvezőbb helyzete még akkor sem feltétlenül kedvezőtlenebb minden egyes ellenfél számára, ha maga a játék zérus-összegű. Kialakulhatnak természetes és stratégiai szövetségek az egyes játékosok között, így a játékszabálynak fontos része lehet az ilyen szövetségek szabályozása, esetleges tiltása.

Az első ilyen szabályozás *John F. Nashnek* köszönhető, aki – máig tartó vitát kavarva – kooperatív és nemkooperatív játékokra osztotta az n-személyes játékelméletet. A Nash által *kooperatívnak* nevezett játékokban (1) a játékosok a döntéseiket közösen hozzák (tehát a játékosok között kiterjedt kommunikáció van), másrészt (2) a megállapodás kötelező érvényű, hiszen azonnal végre is hajtják. Ezzel szemben a *nemkooperatív* játékokban semmiféle kötelező erejű megállapodás nem létezik, olykor még a játékosok közötti kommunikációt is tiltjuk.

Nemkooperatív játékok

A kettőnél több személyes játékokra Neumann Minimax Tétele nem alkalmazható változatlan formában. Az új egyensúly keresésénél kulcsfontosságú, hogy milyen megállapodások, milyen együttműködés engedélyezett a játékosok között.

A nemkooperatív n-személyes játékokban egy köztudott (kevert) stratégia n-esből indulunk ki, mely minden játékos számára előír egy (kevert) stratégiát. Mivel ez a „megállapodás” nem kötelez semmire, a játékosok választanak egy tényleges stratégiát, majd valamilyen saját véletlenforrásnak megfelelően egy tiszta stratégiát. Mindez egymástól függetlenül, illetve egymás tudta nélkül történik. Fontos vonás, hogy a tényleges stratégia eltérhet a megállapodástól, magyarul a játékos „csalhat”, ha egy másik (kevert) stratégia magasabb várható nyereményt hoz. A csalás azonban „nem valószínű,” azaz kicsi annak az esélye, hogy egyszerre ketten is így tesznek. Így egy játékos feltételezheti, hogy miközben ő csal, a többiek megmaradnak a megállapodásnál. Nash a róla elnevezett egyensúlyban pontosan ebből indul ki: azt a megállapodást, amelyet semelyik játékos nem kíván *egyoldalúan* felrúgni, *Nash-,* vagy *nemkooperatív egyensúlyi pontnak* nevezzük. Nash a játékok széles körére igazolta az ilyen egyensúlyi pont, illetve pontok létezését.

A Nash-egyensúly a játékelmélet és a közgazdaságtan, azon belül is a mikroökonómia egyik alapfogalmává vált. A gondolat azonban nem mentes a kritikától, hiszen ritkák az olyan gazdasági- vagy élethelyzetek, ahol teljesen kizárhatjuk a kommunikációt; még ha az együttműködésnek vannak is (például törvényi) akadályai, a koordinációt aligha iktathatjuk ki. Az ilyen játékokról, tehát ahol a kommunikáció megengedett, a kooperáció viszont nem, Nash felosztása semmit nem mond. A két feltétel közül a játékosok közötti megállapodások kötő (kooperatív), vagy nemkötő (nemkooperatív) volta a meghatározó, ezért újabban ez a felosztás az elterjedtebb.

Abban az esetben, ha engedélyezzük a kommunikációt, a Nash-egyensúlyi pontok ki vannak téve játékos *csoportok* összehangolt támadásának. Az ilyen támadásokat is figyelembe vevő *erős Nash-egyensúly* azonban „túl erős", mivel minden lehetséges koalíciós támadást tekintetbe vesz, függetlenül attól, hogy a támadó koalíció maga stabil-e. Emiatt ilyen egyensúly ritkán létezik. Erre a felvetésre a *koalíció-biztos részjáték-tökéletes (coalition-proof subgame-perfect) Nash-egyensúly* fogalma és ennek vizsgálata kísérel meg választ adni. Bár valószínűleg ezzel még nem zárult le a nemkooperatív egyensúlyok fogalmának fejlődése, a modern játékelméletben gyakran feltételezzük, hogy a kommunikáció tartós, kötő megállapodással, tehát kooperatív viselkedéssel is párosul. Az ennél összetettebb koalíciós megoldásokat a kooperatív játékelmélet tárgyalja.

Kooperatív játékok, karakterisztikus függvény

A kooperatív játékelméletre térve először is azt kell tisztáznunk, mennyivel jelent többet a *kooperáció,* mint a nemkooperatív elméletben is megengedett *koordináció.* Míg a koordináció csupán egyéni érdekek összehangolása, a kooperáció együttműködés olyan közös cél érdekében, amely nem esik szükségszerűen egybe az egyéni érdekekkel. Előfordulhat ugyanis, hogy egy játékos kisebb áldozatot vállalva jelentős előnyhöz juttatja a csoport többi tagját. Önzetlenségről szó sincs: csakis akkor hajlandó ilyen lemondásra, ha a többiek a koalíciós szerződésben garantálják a többletnyereség megosztását. Egy ilyen koalíció a külvilág felé teljesen egységes, olyan, akár egyetlen játékos: stratégiákat választ, illetve kifizetést kap. A nyerő stratégiák keresése szempontjából lényegtelen, hogy egy koalíció egy vagy több játékosból áll-e.

Ha létrejön egy koalíció, a kimaradó játékosoknak (Neumann modelljében) érdeke egyetlen koalícióba tömörülni, mivel így tudnak legjobban védekezni az első koalíció „támadásai" ellen. Az így létrejött két koalíció pedig megfelel a kétszemélyes játék két játékosának; ezzel visszavezettük a feladatot a már ismert esetre, melynek megoldását a Minimax Tétel adja.

Mit mutat meg ez a megoldás? Megadja a koalíció várható nyereményét. Ez az érték jellemző a koalícióra, ezért *karakterisztikus értéknek* nevezzük. Feltételezhetjük, hogy a megfelelő nyeremény elosztásakor a koalíció tagjai többet kapnak, mint amit magukban elérhetnének, az elosztás tehát *egyénenként racionális,* hiszen éppen a jobb eredmény a célja a koalíció létrejöttének. A koalíció teljes nyereménye elosztásra kerül, nagyobb összeg viszont nem kerülhet elosztásra. Ezek a tulajdonságok azonban nem határozzák meg az elosztást egyértelműen, itt árnyaltabb megközelítésre van szükség.

Mielőtt erre rátérnénk, vessünk még egy pillantást a karakterisztikus értékre. Mivel minden koalícióhoz egy jól definiált érték tartozik, itt tulajdonképpen egy *függvényről* van szó, mely egy valós számot rendel a játékosok minden egyes részhalmazához, tehát a lehetséges koalíciókhoz (az üres halmaz értéke 0). Ez a karakterisztikus függvény lehet sokkal általánosabb is, nem szükséges a zérus összegű játékokra szorítkozni. Maga a játék is megadható közvetlenül karakterisztikus függvény alakban. Ilyenkor a játékosok stratégiái rejtettek, illetve koalíciók alakításában merülnek ki. Az a tény, hogy ez a rendkívül egyszerű alak is sikeresnek bizonyult, jelzi az együttműködés, a „helyezkedés" fontosságát stratégiai helyzetekben.

A Neumann-féle megoldás

A kooperatív játékokban a hangsúly a koalíciók alakítása és a koalíciókon belüli osztozkodás fele tolódik. A kettő szorosan összefügg: az, hogy egy játékos melyik koalícióhoz tartozik, részben meghatározza, hogy az elosztásból milyen részt kaphat. A kapott kifizetéstől viszont függ, hogy elégedett-e a koalíción belüli helyzetével. Az elégedetlenség relatív fogalom, ahhoz, hogy a különböző elosztásokat összehasonlíthassuk, két fontos tulajdonságot kell bevezetnünk.

Vegyük a játékosok valamely C koalícióját és hasonlítsuk össze a (jelenlegi) y elosztást valamely más x elosztással. A C koalíció *preferálja* (előnyben részesíti) x-et y-nal szemben, ha valamennyi C-beli játékos magasabb kifizetést kap az x elosztásban, mint az y-ban. A preferencia tehát a játékosok vágyait fejezi ki.

A C koalíció *effektív* az x elosztáshoz, ha az x elosztás a halmaz egyetlen tagjának sem utal többet, mint annak karakterisztikus értéke. Ilyenkor tehát a C koalíció bármikor követelheti az x elosztás alkalmazását. Ha ugyanis a többi játékos nem kívánna együttműködni, C külön koalíciót alkot, ezzel a maga számára garantálja a kívánt kifizetést, ugyanakkor a többiek a javasoltnál kedvezőtlenebb helyzetbe kerülnek (legalábbis a Neumannék által vizsgált játékokban). Az effektivitás a játékosok képességeit fejezi ki.

A *dominanciában* a játékosok vágyai és képességei találkoznak. Az x elosztás *dominálja* az y elosztást, ha létezik a játékosoknak olyan C részhalmaza, mely x-et preferálja az y elosztással szemben és effektív az x elosztáshoz, azaz a koalíció egyszerre *akarja* (preferencia) és *tudja* (effektivitás) az y elosztást az x elosztással helyettesíteni.

Ha x dominálja y-t, viszont y nem dominálja x-et, akkor nyugodtan állíthatjuk, hogy x „jobb", mint y. Fordítva hasonlóan érvelhetünk. Ha x és y között nem áll fenn dominancia kapcsolat, esetleg más elosztásokkal összehasonlítva még csak-csak rangsorolhatjuk őket, azonban az is megeshet, hogy x dominálja y-t és y dominálja x-et, azaz a rangsorolás lehetetlen dominancia alapján. Mivel ez gyakran előfordulhat, a megoldást nem valamilyen idealizált legjobb elosztás jelenti, hanem az elosztásoknak egy olyan halmaza, amely *mint halmaz* jobb minden más elosztásnál. Mivel az összes lehetséges elosztás halmaza nyilván teljesíti ezt a feltételt, egy második előírással kiszűrjük a halmaz szükségtelen elemeit.

Az elosztásoknak egy S halmazát *megoldásnak,* vagy *stabil halmaznak* nevezzük, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

- 1. Ha $y \notin S$, akkor létezik olyan $x \in S$, mely dominálja y-t.
- 2. Ha $x \in S$ dominálja y-t, akkor $y \notin S$.

A két feltétel *külső,* illetve *belső stabilitásként* ismert: egy elosztás csak akkor zárható ki, ha létezik helyette egy preferált, elfogadott alternatíva, illetve a megoldás elemei egymással szemben nem rangsorolhatók, tehát egyiküket sincs okunk kizárni, vagy éppen kiemelni. Neumann és Morgenstern értelmezésében a „megoldás" nem más, mint elfogadott „viselkedési normák" gyűjteménye: ha két viselkedési mód közül az egyiket preferálnánk, a másik nem minősülne elfogadottnak. Ugyanakkor egy viselkedési mód csak akkor nem elfogadott, ha helyettesíthető egy másikkal.

Az egyszerű definíció egy meglehetősen bonyolult viselkedésű halmazt takar. A megoldás nem egyértelmű, sőt, gyakran végtelen sok megoldás van. Emellett a korai sejtések ellenére nem minden játéknak létezik megoldása. Ezeknek a nehézségeknek tulajdonítható, hogy az elmúlt évtizedek során számtalan alternatív megoldáskoncepció látott napvilágot és a „tökéletes" fogalom megalkotása ma is tart. Ahol az újabb, egyszerűbb megoldáskoncepciók csődöt mondanak, gyakran visszanyúlnak a Neumann-féle megoldáshoz, mert gyakorlati helyzetekben kitűnően alkalmas a nyeremény előrejelzésére.

Játékelmélet a gyakorlatban

A neumanni alapoktól hosszú út vezet a mai játékelméletig. Ma már kiterjedt tudományról beszélhetünk, amelynek egyre növekvő gyakorlati elvárásoknak kell megfelelnie. Míg ötven évvel ezelőtt a karakterisztikus függvény alak egy reális gazdasági modell alapja lehetett, a globalizáció miatt ma egy vállalat, vagy ország teljesítményét a világgazdaság alakulása legalább annyira befolyásolja, mint a saját erőfeszítései. Ilyen környezetben egy koalíció értéke nem írható le a többi szereplőtől függetlenül, azaz a koalíció-alakítás külhatásait is figyelembe kell venni. A koalíciós játékelmélet leggyakoribb mai alkalmazásainál, így a nemzetközi egyezmények (például a környezetvédelmi egyezmények) vagy kartellek vizsgálatakor, éppen a pozitív külhatást ingyen élvező potyautas-viselkedés (*free-riding*) az egyik központi kérdés. A bizonyos iparágaknál (autógyártás, légiközlekedés) megfigyelhető koncentrálódás során éppen a koalíció alakítás negatív külhatásai okozzák azt a láncreakciót, amelyet egy-egy cégegyesülés kivált. Hasonló módon magyarázható az Európai Unió rohamos bővülése is, hiszen az erősen belterjes európai piacokon fokozott hátrányba kerülnek a kimaradó országok.

Mint oly sok más tudományág, a játékelmélet is bizonyos absztrakt feltevésekből indul ki. Ilyen feltevés a *köztudott tudás.* Ennek hiányában a játékosok eleinte szinte „vakon" játszanak, nem ismerve a játékostársak szempontjait, sőt akár a játék szabályait sem. Ezeket csak ismételt „játszmák" során tanulhatják meg. Az aukciók lényege éppen a rejtett információk felfedése. Az eladó szeretné az árut minél drágábban eladni, a vevők pedig minél olcsóbban megkapni. Ha az eladó tudná, hogy az áruját a vevők mennyire értékelik, az áruért legtöbbet adó vevőnek adná el, méghozzá a lehető legmagasabb áron. Mivel ez az információ nem áll rendelkezésére, kénytelen versenyeztetni egymással a vevőket. Az aukcióelmélet talán leglátványosabb alkalmazásainak a mobiltelefonszolgáltatók számára kiírt pályázatok bizonyultak. Egyes országokban a játékelméleti alapon kidolgozott pályáztatás soha nem látott bevételhez juttatta az államkasszát, míg másutt a tudománytalan versenykiírás miatt a bevétel jóval alulmaradt a (politikai) várakozásoknak. Hasonló módszerek alkalmazhatók más állami pályázatokra, így a privatizációra is.

Ma világszerte több száz kutató foglalkozik játékelmélettel, vannak kifejezetten játékelméleti folyóiratok, konferenciák, kutatóintézetek. A szó azonban ma már nem csak a kutatók számára cseng ismerősen. 1994-ben a játékelmélet elismeréseként Harsányi János, John F. Nash és Reinhard Selten közgazdaságtani Nobel-díjat kaptak, pár évvel később „Egy csodálatos elme" címmel nagysikerű, Oscar-díjas film készült Nash élete alapján. A játékelmélet bekerült a köztudatba, és remélhetőleg a centenáriumi Neumann-év eredményeként az is közismertté válik, hogy e „csodálatos elméletnek" (is) atyja – Neumann János.