1. Hány $(x;y)$ számpár (x és y egész számok) elégíti ki az $|x|+|y|\le n$ (n természetes szám) egyenlőtlenséget? Hány számpár ez $n=1000$ esetén?

2. Írjuk fel azt a másodfokú egész együtthatójú egyenletet, amelynek egyik gyöke $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

3. Mutassuk meg, hogy három egymás után következő páros szám között mindig van olyan, amelyik 2 magasabb hatványával osztható, mint a másik kettő.

4. Mutassuk meg, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számtani sorozat minden eleme pozitív, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

5. Milyen nagy lehet a 10-es számrendszerben megadott $\overline{ababab}$ pozitív egész szám legnagyobb prímosztója?

6. Hány olyan egész számokból álló $(x;y)$ számpár van, amelyre igaz, hogy $\log_x\left(5\sqrt{xy}+24\right)=1+\log_x y$?

7. Hány 2-nél kisebb pozitív eleme van az $a_n=-3+\log_2(n+4)$ sorozatnak?

8. Mely x esetén lesz minimális a $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-16x+73}$ kifejezés értéke?

9. Határozzuk meg az A, B, C értékeket, majd rakjuk nagyság szerint növekvő sorrendbe.

$$A=\frac{(\sin 15^\circ+\cos 15^\circ)^{2002}}{3^{1001}}, \qquad B=\log_{7+4\sqrt{3}}\frac{1}{97+56\sqrt{3}},$$

$$C=\cos(1\cdot 9^\circ)+\cos(2\cdot 9^\circ)+\cos(3\cdot 9^\circ)+\ldots+\cos(19\cdot 9^\circ).$$

10. Egy iskolából összesen n tanuló és tanár indult egy autóbuszos kirándulásra. Az eredetileg megrendelt autóbuszok helyett eggyel kevesebb jött, ezért mindegyik autóbuszra 5-tel többen szálltak fel. Hány autóbuszt rendeltek és hányan indultak el kirándulni, ha $300\le n\le 400$?

11. Az x és y pozitív számok számtani közepe egy derékszögű háromszög befogóinak összege, mértani közepük az átfogó. Fejezzük ki x-et és y-t a befogók segítségével.

12. Az AB átfogójú derékszögű háromszög befogói 5 és 12 egység hosszúak. Rajzoljunk a befogóira kifelé négyzeteket, az $ACEG$ és $CBKH$ négyzeteket (G az A, K a B csúccsal szomszédos). Jelölje F a GK szakasz, M pedig az AB átfogó felezőpontját. Határozzuk meg az MF szakasz hosszát.

13. Egy téglalap alakú szoba padlóját négyzet alakú járólapok fedik. A szoba szélessége m, hossza n darab járólappal fedhető le ($m\le n$). A járólapok fele a szoba fala mentén van. Hány különböző méretű szoba elégíti ki ezeket a feltételeket?

14. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan mértani sorozat, amelynek első eleme 3, az n-edik eleme 13, az első n elem reciprokainak összege 8.

15. Két évre befektettünk 400 ezer forintot. A második év végén 521 920 forintot vehettünk fel.

a) Hány százalék volt az átlagos évi hozam?

b) A második évi hozam 4,5 százalékponttal magasabb volt, mint az első évi. Hány százalék volt a ténylegesen elért hozam az egyes években?

16. Függőön nehezékeként olyan tömör, acélból készített testet használunk, amelyik egy 2 cm oldalú szabályos ötszög egyik szimmetriatengelye körüli forgatásával származtatható.

a) Mekkora a nehezék tömege? (Az acél sűrűsége 7840 kg/m^3.)

b) Ha a nehezék forgáshengerből forgácsolással (esztergálással) készül, legalább hány százalék hulladék keletkezik? (A henger és a belőle készült test forgástengelye azonos.)

17. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói merőlegesek. Az AB, BC, CD oldalak felezőpontjai rendre F_1, F_2, F_3. Az átlók P metszéspontjának és az oldalfelező pontok távolsága $PF_1=15$, $PF_2=13$, $PF_3=5$ egység. Határozzuk meg az $ABCD$ négyszög kerületét.

18. Oldjuk meg a $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}\le 3$ egyenlőtlenséget.

19. Egy $\{a_n\}$ sorozat egymást követő elemeinek különbségei egy $\{b_n\}$ mértani sorozat egymást követő elemei. A mértani sorozat n-edik eleme 2-vel nagyobb, mint a_n minden n-re. Az $\{a_n\}$ sorozat első három elemének összege 7-tel kisebb, mint a_4. Adjuk meg mind az $\{a_n\}$, mind a $\{b_n\}$ sorozat első 5 elemét.

20. Adott a koordinátasíkon ez e egyenes és a vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor. A P és Q pontot eltoltuk a $\mathbf{v}$ vektorral, majd a kapott P' és Q' pontokat tükröztük az e egyenesre, így kaptuk a P'' és Q'' pontokat. Határozzuk meg az e egyenes egyenletét és a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáit, ha tudjuk, hogy $P(1;2)$, $P''(4;3)$ és $Q(0;4)$, $Q''(6;2)$.