

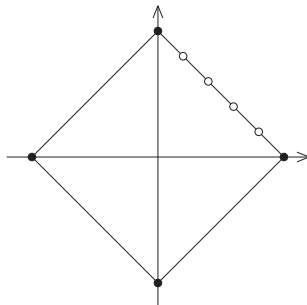
1. Jelölje C_n és E_n az $|x| + |y| \leq n$ egyenlőtlenség, illetve az $|x| + |y| = n$ egyenlet egész megoldásainak a számát. Ekkor nyilván $C_0 = E_0 = 1$ és $C_i = E_i + C_{i-1}$. Adjuk össze ezeket az egyenlőségeket az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n + C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1},$$

azaz

$$C_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n + C_0.$$

Az E_i halmaz elemei az $|x| + |y| = i$ egyenlet egész megoldásai (ábra). Az $x \geq 0, y \geq 0$ síknegyedben $i + 1$ megoldást kapunk, ezek: $(i; 0), (i-1; 1), \dots, (0; i)$. A további három síknegyeddel együtt ez összesen $4(i+1)$ megoldás, így azonban a tengelyeken lévő összesen 4 megoldás mindegyikét kétszer számoltuk. Eszerint $E_i = 4i$, ha $i > 0$.



Így $C_n = 4(1 + 2 + \dots + n) + 1 = 2n^2 + 2n + 1$. Behelyettesítve $C_{1000} = 2\,002\,001$.

2. Legyen $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = u$ és u konjugáltját, $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ -t jelöljük v -vel. Ekkor

$$uv = \sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})} = -1.$$

Próbáljuk kiszámolni $u + v$ értékét. Az $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ azonosság felhasználásával $(u + v)^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} - 3(u + v)$, tehát $t = u + v$ gyöke a $t^3 = 14 - 3t$ egyenletnek. Némi próbálkozás után kapjuk, hogy az egyenletnek megoldása a 2, ennek megfelelően $t^3 + 3t - 14 = (t - 2)(t^2 + 2t + 7)$. A másodfokú tényezőnek nincsen valós gyöke, így ha t olyan valós szám, amelyre $t^3 + 3t - 14 = 0$, akkor $t = 2$.

u -ra és v -re az $uv = -1, u + v = 2$ egyenleteket kaptuk, a gyökök és együtthatók közti összefüggések szerint tehát u (és persze v) gyökei az

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

egyenletnek.

Megjegyzések. 1. Némi próbálkozás után felismerhető, hogy a köbgyök alatt $7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$ áll. Így $u = 1 + \sqrt{2}$, ahonnan ugyancsak felírható a keresett egyenlet:

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1 = 0.$$

2. Ha közvetlenül az $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ „egyenletre” alkalmazzuk az előbbi módszert, akkor köbre emelés után $x^3 = 7 + 5\sqrt{2}$ adódik, amit rendezve és négyzetre emelve $(x^3 - 7) = 50$, azaz a hatodfokú $x^6 - 14x^3 - 1 = 0$ egyenlet adódik. Ennek a polinomnak valóban osztója az $x^2 - x - 1$ polinom.

3. Ha a három szomszédos páros szám közül a középső osztható 4-gyel, akkor a két szélső $4k - 2$ és $4k + 2$ alakú szám a 2-nek pontosan az első hatványával osztható, ebben az esetben a középső szám megfelelő. Ha pedig a középső páros szám nem osztható 4-gyel, akkor mindkét szélső páros szám a 4-nek többszöröse. Közülük pontosan egy 8-cal is osztható és így rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

4. Ha a sorozat differenciája nulla, akkor $\sqrt{a_i} = \sqrt{a_1}$, a bal oldalon az $n - 1$ egyenlő tagból álló összeg értéke $\frac{n-1}{2\sqrt{a_1}}$, ami egyenlő a jobb oldal értékével.

Ha $d \neq 0$, akkor gyöktelenítsük a nevezőket:

$$\frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} = \frac{\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}}{a_{i+1} - a_i} = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}).$$

A bal oldal értéke tehát

$$\frac{1}{d} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_{n-2}} + \dots + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}.$$

A jobb oldalon a nevezőt gyöktelenítve

$$\frac{(n-1)(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1})}{a_n - a_1}$$

adódik, ami $a_n - a_1 = (n-1)d$ miatt valóban egyenlő a bal oldal értékével.

5. $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Ennek a számnak a legnagyobb prímosztója a 37-nél nagyobb \overline{ab} prím lehet. A legnagyobb kétjegyű prím a 97, így 979 797 esetén kapjuk a legnagyobb prímosztót, értéke 97.

6. A logaritmus értelmezése szerint $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$. A feltétel szerint x és y egész számok, így $x \geq 2$, $y \geq 1$. Ekkor a bal oldal is értelmes. A jobb oldal $\log_x xy$, a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, tehát $5\sqrt{xy} + 24 = xy$.

$0 \leq \sqrt{xy}$ -ra nézve másodfokú egyenletet kaptunk, ennek nemnegatív gyöke 8, ahonnan $xy = 64$. Mivel $x \geq 2$ egész, a $64 = 2^6$ -nak 1-nél nagyobb osztói lehetnek x értékei és minden ilyen x -re $y = \frac{64}{x}$ pozitív egész. Lépéseink megfordíthatók, így ezek a számpárok megoldásai az eredeti egyenletnek.

Az egyenlet tehát összesen hat pozitív egész számpárra teljesül.

7. $0 < a_n < 2$ pontosan akkor teljesül, ha

$$3 < \log_2(n+4) < 5.$$

Az $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, így a feltétel ekvivalens a

$$2^3 < n+4 < 2^5$$

egyenlőtlenséggel. A $]2^3; 2^5[$ intervallumban $2^5 - 1 - 2^3 = 23$ egész szám van. $n+4$ ezek mindegyikét fölveszi és $\log_2(n+4)$ ezek mindegyikére értelmes.

A sorozatnak tehát 23 olyan pozitív eleme van, amely kisebb 2-nél.

8. I. megoldás. Jelöljük a bal oldalon álló függvényt $f(x)$ -szel és a második tagban alakítsunk teljes négyzetté a négyzetgyökök alatt:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 9}.$$

Ekkor $g(x) = f(x+4) = \sqrt{(x+4)^2 + 9} + \sqrt{(x-4)^2 + 9}$, így elegendő $g(x)$ minimális értékét keresni. Mivel $g(x) > 0$, azért $g(x)$ akkor minimális, ha $g^2(x)$ minimális.

$$\begin{aligned} g^2(x) &= 2(x^2 + 25) + 2\sqrt{(x^2 + 25 + 8x)(x^2 + 25 - 8x)} = \\ &= 2(x^2 + 25) + 2\sqrt{(x^2 + 25)^2 - 64x^2}. \end{aligned}$$

A második gyökjel alatt két pozitív mennyiség szorzata áll:

$$(x^2 + 25)^2 - 64x^2 = x^4 - 14x^2 + 25^2 \geq x^4 - 50x^2 + 25^2 = (x^2 - 25)^2,$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x^2 = 0$. Így

$$g^2(x) \geq 2(x^2 + 25) + 2\sqrt{(x^2 - 25)^2} = 2(x^2 + 25) + 2|x^2 - 25| = \begin{cases} 4x^2, & \text{ha } x^2 \geq 25 \\ 100, & \text{ha } x^2 < 25. \end{cases}$$

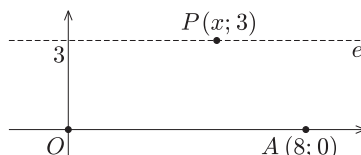
Ha $x^2 \geq 25$, akkor $4x^2 \geq 100$, így mindenképpen

$$g^2(x) \geq 100, \text{ azaz } g(x) \geq 10,$$

egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$. Így $f(x) = g(x-4) \geq 10$ és pontosan akkor van egyenlőség – azaz $f(x)$ pontosan akkor minimális –, ha $x = 4$.

II. megoldás. $f(x)$ két tagjának geometriai jelentés tulajdonítható.

Tekintsük a derékszögű koordinátarendszerben az $O(0;0)$, $A(8;0)$ és az $y = 3$ egyenesen mozgó $P(x;3)$ pontokat (1. ábra).



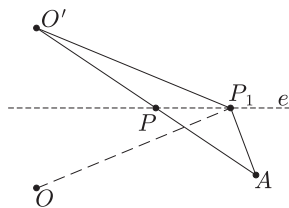
1. ábra

Ekkor az ismert távolságformula szerint

$$PO = \sqrt{x^2 + 3^2} \quad \text{és} \quad PA = \sqrt{(x - 8)^2 + 3^2}.$$

A feladat kérdése tehát úgy fogalmazható, hogy az e egyenes mely P pontjára lesz minimális a $PO + PA$ távolságösszeg.

A feladat jól ismert megoldását úgy kapjuk, hogy az egyik rögzített pontot – legyen ez az O – tükrözzük az e egyenesre (2. ábra). Ekkor az $O'A$ szakasz e -vel való P metszéspontjában adódik a minimum.



2. ábra

Valóban, az egyenes tetszőleges, P -től különböző P_1 pontjára $OP_1 = O'P_1$ a tükrözés miatt, a háromszög-egyenlőtlenség szerint pedig $O'P_1 + P_1A > O'P + PA = O'A$.

Mivel az e egyenes most párhuzamos az OA szakasszal, az egyenes középvonala az AOO' háromszögnek, így P első koordinátája a két rögzített pont, O és A első koordinátájának a számtani közepe, $x_P = \frac{x_O + x_A}{2} = 4$. A $PO + PA$ összeg tehát az e egyenes $P(4; 3)$ pontjára lesz a legkisebb, így a kifejezés értéke akkor minimális, ha $x = 4$.

9. A. Szorozzuk $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ értékét $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel. Az ismert addíciós összefüggés szerint

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) = \sin 15^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 45^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, azaz

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{2002} \cdot \frac{1}{3^{1001}} = \frac{1}{2^{1001}}.$$

B. Mivel $97 + 56\sqrt{3} = (7 + 4\sqrt{3})^2$, azért

$$B = \log_{7+4\sqrt{3}} \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}} = \log_{7+4\sqrt{3}} (7 + 4\sqrt{3})^{-2} = -2.$$

C. Számoljuk $2C$ értékét úgy, hogy a második alkalommal fordított sorrendben írjuk le az összeg tagjait. (Ahogyan a legenda szerint a kis Gauss összegezte a számtani sorozatot.) Ekkor

$$2C = \cos(1 \cdot 9^\circ) + \cos(2 \cdot 9^\circ) + \dots + \cos(19 \cdot 9^\circ) + \\ + \cos(19 \cdot 9^\circ) + \cos(18 \cdot 9^\circ) + \dots + \cos(1 \cdot 9^\circ).$$

Az összesen $2 \cdot 19$ tagú összeg egymás alatt álló tagjai

$$\cos(i \cdot 9^\circ) + \cos[(20 - i) \cdot 9^\circ] = \cos(9i^\circ) + \cos(180^\circ - 9i^\circ)$$

alakúak. Ismeretes, hogy ha $\alpha + \beta = 180^\circ$, akkor $\cos \alpha + \cos \beta = 0$, így az egymás alatt álló tagok összege 0, tehát $2C = 0 = C$.

A megfelelő sorrend tehát $B < C < A$.

10. Ha eredetileg b autóbust rendelték, akkor a feltétel szerint

$$\frac{n}{b-1} = \frac{n}{b} + 5, \quad \text{azaz} \quad n = 5(b^2 - b).$$

Ha $300 \leq n \leq 400$, akkor $60 \leq b^2 - b \leq 80$, tehát a

$$b^2 - b - 80 \leq 0 \leq b^2 - b - 60$$

egyenlőtlenségrendszer kell megoldanunk, ahol b pozitív egész.

Az első feltételből $b \leq 9,46$, a másodiktól pedig $b \geq 8,26$ adódik. Így $b = 9$ és $n = 5 \cdot (9^2 - 9) = 360$.

11. Ha a és b a derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogó, akkor Pitagorasz tétele szerint $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, a feltétel pedig azt jelenti, hogy

$$\frac{x+y}{2} = a+b \quad \text{és} \quad \sqrt{xy} = c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Innen az

$$x+y = 2(a+b)$$

$$xy = a^2 + b^2$$

egyenletrendszert kapjuk.

A gyökök és együtthatók közti összefüggések szerint x és y gyökei a

$$t^2 - 2(a+b)t + a^2 + b^2 = 0$$

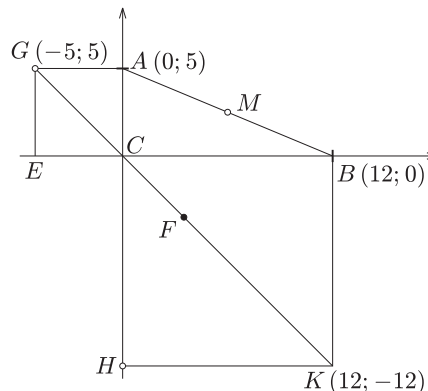
másodfokú egyenletnek, amit megoldva $t_{1,2} = a+b \pm \sqrt{2ab}$.

Az x , y mennyiségek értéke tehát valamilyen sorrendben $a+b - \sqrt{2ab}$ és $a+b + \sqrt{2ab}$.

Megjegyzés. Ha a és b pozitív számok, akkor $a+b - \sqrt{2ab} > 0$, a feladatnak tehát minden derékszögű háromszögre van megoldása.

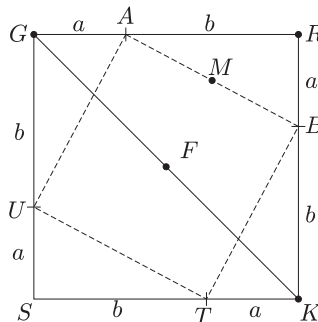
12. I. megoldás. Vegyünk föl egy derékszögű koordinátarendszert az 1. ábra szerint. Ekkor $M(6; 2,5)$ és $F(3,5; -3,5)$. Az MF szakasz hosszát a távolságformulával számolva

$$MF = \sqrt{2,5^2 + 6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5.$$



1. ábra

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot általánosan, legyenek a háromszög befogói a és b , átfogója c . Induljunk ki egy $a+b$ oldalú $GSKR$ négyzetből (2. ábra). Ha a négyzet minden oldalát az ábra szerint osztjuk fel a , b hosszúságú szakaszokra, akkor az osztópontok az $AUTB$ négyzet csúcsai.

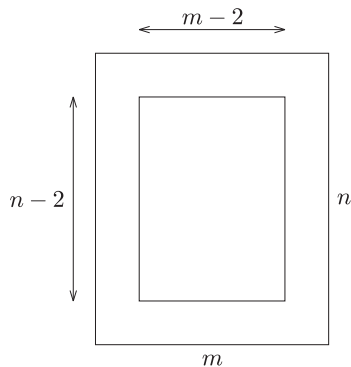


2. ábra

A két négyzet közös centruma a GK átló F felezőpontja (az F körüli 90° -os forgatás az ábrát önmagába viszi). Az AFB tehát egyenlő szárú derékszögű háromszög, a derékszögű csúcsot, F -et az $AUTB$ négyzet AB oldalának M felezőpontjával összekötő szakasz hossza tehát a négyzet oldalának, AB -nek a felével egyenlő.

Megjegyzés. A feladat háromszögének átfogója $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, ennek fele $6,5$. A második bizonyításból az is kiderül, hogy FM merőleges AB -re.

13. A feltételből következik, hogy $m \geq 3$. A szoba összesen $m \cdot n$ darab járólappal fedhető le, a fallal nem érintkező „belső” részen pedig $(m-2)(n-2)$ járólappal van.



A feltétel szerint

$$mn = 2(m-2)(n-2) = 2mn - 4m - 4n + 8.$$

Rendezés után $mn - 4m - 4n + 8 = 0$, azaz

$$(m-4)(n-4) = 8$$

adódik. A bal oldalon $m-4$ és $n-4$ egész számok és $3 \leq m \leq n$ miatt $-1 \leq m-4 \leq n-4$, ha tehát a szorzatuk 8, akkor mindkettő pozitív. A 8 pozitív egészek szorzataként $1 \cdot 8$ vagy pedig $2 \cdot 4$ alakban áll elő, ha a tényezők nagyságviszonyára is tekintettel vagyunk. Így két megoldást kapunk:

a) $m-4 = 1$ és $n-4 = 8$, azaz $m = 5$ és $n = 12$;

b) $m-4 = 2$ és $n-4 = 4$, azaz $m = 6$ és $n = 8$.

Mindkét számpár megoldása a feladatnak.

14. Tegyük fel, hogy létezik ilyen mértani sorozat. Ekkor $a_n \neq a_1$ miatt a sorozat hányadosa, $q \neq 1$. A sorozat elemeinek reciprokai is mértani sorozatot alkotnak, ennek hányadosa $\frac{1}{q} \neq 1$. Az ismert összefüggés szerint az elemek reciprokának összege

$$8 = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^n}{q^{n-1} - q^n}.$$

Használjuk fel, hogy $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$. Az elemek reciprokának összege így a következőképpen alakul:

$$8 = \frac{1 - \frac{a_n}{a_1} q}{a_n - q \cdot a_n}.$$

Behelyettesítve

$$8 = \frac{1 - \frac{13}{3}q}{13(1-q)}, \quad \text{ahonnan} \quad q = \frac{309}{299}, \quad \text{vagyis} \quad q^{n-1} = \left(\frac{309}{299}\right)^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{13}{3}.$$

Innen $309^{n-1} \cdot 3 = 299^{n-1} \cdot 13$ következik. Mivel $n \geq 3$ egész, a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldal pedig nem. Ez az egyenlőség tehát egyetlen pozitív egész n -re sem állhat fenn, a kérdéses mértani sorozat valóban nem létezik.

15. a) Ha $p\%$ jelöli az átlagos évi hozamot, akkor

$$400\,000 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 521\,920, \quad \text{ahonnan} \quad 1 + \frac{p}{100} = \sqrt{\frac{521\,920}{400\,000}} \approx 1,1423,$$

az átlagos évi hozam tehát $p \approx 14,23\%$.

b) Ha $q\%$ jelöli a tényleges első évi kamatlábat, akkor a második évi kamatláb $(q+4,5)\%$, befektetésünk a második év után $\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q+4,5}{100}\right)$ -szorosára növekszik.

Így q -ra a másodfokú

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{q+4,5}{100}\right) = \frac{52\,192}{40\,000}$$

egyenletet kapjuk. Rendezés után kapjuk, hogy $2q^2 + 409q - 5196 = 0$.

Ennek az egyenletnek a pozitív megoldása $q = \frac{-409 + 457}{4} = 12$.

A tényleges kamatláb tehát az első évben 12%, a másodikban pedig 16,5% volt.

Megjegyzés. Az átlagos kamatláb *nem* az éves kamatlábak számtani közepe. Az éves szorzószámokat összehasonlítva

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \left(1 + \frac{12}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{16,5}{100}\right),$$

azaz $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ az $\left(1 + \frac{12}{100}\right)$ és az $\left(1 + \frac{16,5}{100}\right)$ *mértani közepe*, valamivel kisebb a számtani közepükénél, $\left(1 + \frac{12 + 16,5}{200}\right)$ -nál. Ennek megfelelően $p \approx 14,23$ is valamivel kisebb, mint $\frac{12 + 16,5}{2} = 14,25$.

16. a) $V = V_{\text{kúp}} + V_{\text{cs.kúp}}, \alpha = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ,$

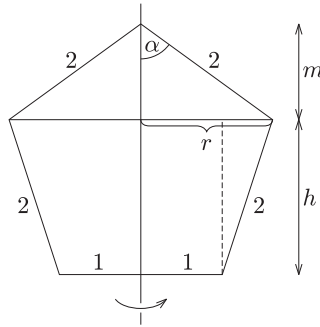
$$r = 2 \sin 54^\circ \approx 1,62, \quad m = 2 \cos 54^\circ \approx 1,18,$$

$$h = \sqrt{4 - (r - 1)^2} \approx 1,9,$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{\pi r^2 m}{3} = \frac{8 \sin^2 54^\circ \cos 54^\circ}{3} \pi \approx 3,22 \text{ cm}^3,$$

$$V_{\text{csokakúp}} = \frac{\pi}{3} \cdot h(r^2 + r + 1) \approx 10,42 \text{ cm}^3,$$

$$V \approx 13,64 \text{ cm}^3.$$



A függőn tömege $M = V \cdot \rho \approx 106,9$ g.

b) A minimális forgáshenger sugara r , magassága pedig $m + h$. A térfogata így $V_H = r^2 \pi (m + h) \approx 25,25 \text{ cm}^3$, így legalább $V_H - V \approx 11,61 \text{ cm}^3$ hulladék keletkezik, ami a henger térfogatának közelítőleg 46%-a.

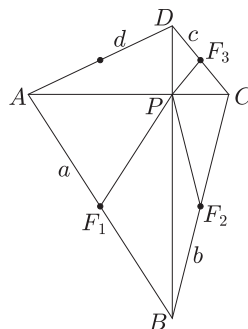
17.

$$\begin{aligned} AB^2 - BC^2 &= (AB^2 - BP^2) - (BC^2 - BP^2) = \\ &= AP^2 - PC^2 = (AD^2 - DP^2) - (DC^2 - DP^2) = \\ &= AD^2 - DC^2, \end{aligned}$$

azaz $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$, vagy átrendezve

$$AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2;$$

ha a négyszög átlói merőlegesek, akkor a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.



Thalész tétele szerint $AB = 2PF_1 = 30$, $BC = 2PF_2 = 26$, $CD = 2PF_3 = 10$. Így $AD^2 = AB^2 + DC^2 - BC^2 = 30^2 + 10^2 - 26^2 = 324 = 18^2$.

Az $ABCD$ négyszög kerülete $30 + 26 + 10 + 18 = 84$.

Megjegyzés. A megoldás során talált állításnak a megfordítása is igaz: ha egy négyszög szemközti oldalainak négyzetösszege egyenlő, akkor a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

18. Mindkét négyzetgyök alatt teljes négyzet áll:

$$x - 1 - 2\sqrt{x-2} = (\sqrt{x-2} - 1)^2 \quad \text{és} \quad x + 2 - 4\sqrt{x-2} = (\sqrt{x-2} - 2)^2,$$

így a $|\sqrt{x-2} - 1| + |\sqrt{x-2} - 2| \leq 3$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

Az abszolút értéket felbontva:

$$|\sqrt{x-2} - 1| + |\sqrt{x-2} - 2| = \begin{cases} 3 - 2\sqrt{x-2}, & \text{ha } \sqrt{x-2} < 1; \\ 1, & \text{ha } 1 \leq \sqrt{x-2} < 2; \\ 2\sqrt{x-2} - 3, & \text{ha } 2 \leq \sqrt{x-2}. \end{cases}$$

Mivel $\sqrt{x-2} \geq 0$, azért a vizsgált egyenlőtlenség teljesül, ha $\sqrt{x-2} < 2$, ha pedig $2 \leq \sqrt{x-2}$, akkor $2\sqrt{x-2} - 3 \leq 3$, azaz $\sqrt{x-2} \leq 3$.

Összefoglalva: a feladat egyenlőtlensége akkor és csak akkor teljesül, ha $\sqrt{x-2} \leq 3$, azaz – figyelembe véve, hogy $\sqrt{x-2}$ -nek értelmesnek kell lennie –, ha $2 \leq x \leq 11$.

19. A feltétel szerint az $a_{n+1} - a_n$ különbségsorozat elemeire $a_{n+1} - a_n = b_n = 2 + a_n$, ahonnan

$$(*) \quad a_{n+1} = 2a_n + 2.$$

Innen $a_2 = 2a_1 + 2$, $a_3 = 2a_2 + 2 = 4a_1 + 6$, $a_4 = 2a_3 + 2 = 8a_1 + 14$. A feltétel szerint $a_1 + a_2 + a_3 + 7 = a_4$, azaz $(7a_1 + 8) + 7 = 8a_1 + 14$, ahonnan $a_1 = 1$.

Így $a_2 = 4$, $a_3 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$, $a_4 = 2 \cdot 10 + 2 = 22$, $a_5 = 2 \cdot 22 + 2 = 46$.

Mivel a bizonyításban eddig nem használtuk fel, hogy a $b_n = a_{n+1} - a_n$ mértani sorozat, meg kell mutatnunk, hogy ez a feltétel is teljesül, egyébként a feladatnak nincsen megoldása.

A (*) rekurzió felhasználásával a b_n különbségsorozatra azt kapjuk, hogy

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (2a_n + 2) - (2a_{n-1} + 2) = 2(a_n - a_{n-1}) = 2b_{n-1}.$$

A b_n sorozat tehát valóban mértani sorozat, a hányadosa 2.

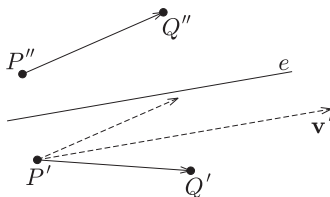
A b_n sorozat elemei tehát: $b_1 = a_2 - a_1 = 3$ és így $b_2 = 2 \cdot 3 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$, $b_5 = 48$.

Megjegyzés. A b_n sorozatra vonatkozó észrevétel lehetővé teszi, hogy felírjuk a (*) rekurzióval értelmezett sorozat n -edik elemét:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_2 - a_1 + a_1 = \\ &= b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 + a_1 = 1 + 3 \cdot (2^{n-1} - 1). \end{aligned}$$

Hasonlóan kapható meg az $a_{n+1} = p \cdot a_n + q$ sorozat n -edik eleme is, ha az első elem, a_1 értéke adott.

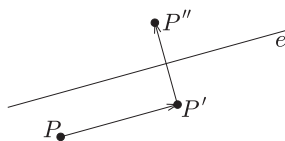
20. A tükrözés miatt $\mathbf{v}' = \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{P''Q''}$ párhuzamos az e egyenessel és így az e -vel párhuzamos \mathbf{v} vektorral is (1. ábra).



1. ábra

Az eltolás miatt $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$, így $\mathbf{v}' = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{P''Q''} = (-1; 2) + (2; -1) = (1; 1)$.

A tükrözés miatt $\overrightarrow{P'P''}$ merőleges e -re és így \mathbf{v} -re is, az eltolás miatt pedig $\overrightarrow{PP'}$ párhuzamos \mathbf{v} -vel (2. ábra).



2. ábra

Ha tehát a $\overrightarrow{PP''} = (3; 1)$ vektort felbontjuk egy \mathbf{v} -vel párhuzamos és egy \mathbf{v} -re merőleges vektor összegére, akkor a vektorfelbontás egyértelmősége miatt a \mathbf{v} -vel párhuzamos összetevő éppen $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$, a \mathbf{v} -re merőleges összetevő pedig $\overrightarrow{P'P''}$.

Legyen $\overrightarrow{PP'} = t \cdot \mathbf{v}' = (t; t)$. Ez akkor lesz megfelelő, ha $\overrightarrow{PP''} - t \cdot \mathbf{v}' = (3 - t; 1 - t)$ merőleges \mathbf{v}' -re, azaz skalárszorzatuk nulla:

$$(\overrightarrow{PP''} - t \cdot \mathbf{v}') \cdot \mathbf{v}' = 0.$$

A $(3 - t; 1 - t) \cdot (1; 1)$ skalárszorzat értéke $4 - 2t$, ez pontosan akkor 0, ha $t = 2$.

Így $\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{v}' = (2; 2)$, a P' pont koordinátái $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$ miatt $P'(1 + 2; 2 + 2)$.

Az e egyenesnek \mathbf{v} egy irányvektora, egyenletéhez elég egyetlen pontja. A tükrözés miatt a $P'P''$ szakasz felezőpontja $\left(\frac{3+4}{2}; \frac{4+3}{2}\right)$ rajta van az e egyenesen, amelynek egyenlete így $y - x = 0$.