1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:*

$$a)\quad \frac{(x-1)\big(x^3+x^2+x+1\big)}{(x+1)\big(x^3-x^2+x-1\big)}=1;$$

$$b)\quad \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{ctg} x};\qquad c)\quad \frac{\log_x 7}{\log_x 3}=\frac{\log_3 5}{\log_7 5}.$$

Megoldás. *a*) Mivel

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)\equiv(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

és

$$(x+1)(x^3-x^2+x-1)\equiv(x+1)(x-1)(x^2+1),$$

azért az egyenlet megoldásai $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

b) Az egyenlet akkor értelmezett, ha $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ értelmezett és $\operatorname{ctg} x\neq 0$, azaz ha $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Azonos átalakításokkal $|\operatorname{tg} x|=-\operatorname{tg} x$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x\leq 0$ és $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Az egyenlet megoldásai:

$$\frac{\pi}{2}+n\pi<x<\pi+n\pi,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

c) Az egyenletnek minden 1-től különböző pozitív valós szám megoldása, mert egy logaritmusfüggvény alapszáma és

$$\frac{\log_x 7}{\log_x 3}=\log_3 7\quad \text{és}\quad \frac{\log_3 5}{\log_7 5}=\frac{\frac{1}{\log_5 3}}{\frac{1}{\log_5 7}}=\frac{\log_5 7}{\log_5 3}=\log_3 7.$$

2. *Egy trapéz átlói merőlegesek egymásra. Párhuzamos oldalainak hossza* 13, *illetve* 39 *egység, egyik szára* $\sqrt{369}$ *egység. Mekkora a trapéz másik szára, területe és magassága?*

Megoldás. A trapézt az átlói négy derékszögű háromszögre bontják. A párhuzamos oldalakhoz tartozó háromszögek hasonlók, a hasonlósági arány $3:1$. Legyen az átlók két szelete $3x$, x, illetve $3y$, y. Ekkor $x^2+y^2=13^2$ és $x^2+9y^2=369$, ahonnan $y^2=25$, $x^2=144$, s mivel $x>0$ és $y>0$, azért $x=12$, $y=5$. A másik szár hossza

$$\sqrt{9x^2+y^2}=\sqrt{9\cdot 144+25}=\sqrt{1321}\text{ egység.}$$

Az átlók hossza $4x=48$, illetve $4y=20$ egység, s mivel az átlók merőlegesek egymásra, azért a trapéz területe $T=\frac{48\cdot 20}{2}=480$ területegység. A trapéz m magasságára $\frac{13+39}{2}\cdot m=480$, $m=\frac{240}{13}$ egység.

3. *Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az*

$$(m+1)x^2+(2m+1)x-2=0$$

egyenletnek két különböző, (-1)*-nél kisebb valós gyöke legyen.*

Megoldás. Mivel az egyenletnek két különböző gyöke van, azért $m+1\neq 0$ és az egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát

$$D=(2m+1)^2+8(m+1)\equiv(2m+3)^2>0,\quad \text{azaz}\quad m\neq-\frac{3}{2}.$$

Az egyenlet gyökei: $x_1=-2<-1$ és $x_2=\frac{1}{m+1}$. A követelmények szerint

$$\frac{1}{m+1}<0\quad \text{és}\frac{1}{m+1}<-1,\quad \text{azaz}\quad m<-1\quad \text{és}\quad \frac{m+2}{m+1}<0,$$

így $m>-2$. Az egyenletnek akkor van két különböző, (-1)-nél kisebb gyöke, ha $-2<m<-\frac{3}{2}$ vagy $-\frac{3}{2}<m<-1$.

4. *Egy sorozat első tagja* 1, *a hatodik tagja* 51, *az első három tag összege* 23; *a szomszédos tagok különbségei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Számítsuk ki a sorozat első három tagját.*

Megoldás. Legyen a különbségsorozat első öt tagja: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$. A sorozat első hat tagja: 1, $1+a$, $1+2a+d$, $1+3a+3d$, $1+4a+6d$, $1+5a+10d$. A feltétel szerint $3+3a+d=23$ és $1+5a+10d=51$, ahonnan $a=6$, $d=2$. A sorozat első három tagja: 1, 7, 15.

5. *Adott egy háromszög két oldala, a és c* $\left(\frac{c}{2}<a<c\right)$, *valamint*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)},$$

ahol α az a, γ a c, β pedig a (harmadik) b oldallal szemközti szög. Fejezzük ki a-val és c-vel a b oldal hosszát.

Megoldás. $\alpha+\gamma=180^\circ-\beta$ és $\beta+\gamma=180^\circ-\alpha$, tehát

$$\cos(\alpha+\gamma)=\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$$

és

$$\cos(\beta+\gamma)=\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Ezek alkalmazásával $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{-\cos\beta}{-\cos\alpha}$, ahonnan $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos\beta$, tehát $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $2\alpha=2\beta$, $\alpha=\beta$ és ekkor $b=a$, vagy $2\alpha+2\beta=180^\circ$, $\alpha+\beta=90^\circ$, $\gamma=90^\circ$, és ekkor $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

6. *Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik közös külső érintőjüknek az érintési pontok közé eső szakaszát megforgatjuk a körök középpontjain áthaladó egyenes körül. A keletkezett csonkakúp palástjának területe 576π területegység, az egyik kör sugara 16 egység. Mekkora a másik kör sugara?*

Megoldás. Legyen a két kör középpontja O_1, O_2, a körök sugarai R_1, R_2, az érintési pont E. Az egyik külső érintőszakasz két végpontja, az érintési pontok E_1, E_2. Messe a két kör E-beli közös érintője az E_1E_2 szakaszt F-ben, $E_1E_2=a$. Az E_1, illetve E_2 pontok merőleges vetülete az O_1O_2 egyenesen legyen T_1, illetve T_2. A forgással keletkező csonka kúp alap-, illetve fedőlapkörének sugara $E_1T_1=r_1$, illetve $E_2T_2=r_2$. A csonka kúp palástjának területe $P=(r_1+r_2)a\pi$. Egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $FE_1=FE=FE_2=\dfrac{a}{2}$. Az O_1FO_2 háromszög derékszögű (miért?), alkalmazható a magasságtétel, $FE^2=O_1E\cdot EO_2$, azaz $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=R_1\cdot R^2$, $a^2=4R_1R_2$. Az $E_1T_1T_2E_2$ négyszög trapéz, középvonala $EF=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{a}{2}$, tehát $r_1+r_2=a$.

A csonka kúp palástjának felszíne $P=(r_1+r_2)a\pi=a^2\pi=4R_1R_2\pi$. Most $P=576\pi$, $R_1=16$, tehát $576\pi=4\cdot16\cdot R_2\pi$, ahonnan $R_2=9$ egység.

7. *A k kör érinti az y tengelyt és a $3x-4y=48$ egyenletű egyenest az $x_1=8$ abszcisszájú E pontjában. Írjuk fel a kör egyenletét.*

Megoldás. Az $x_1=8$ abszcisszájú érintési pont y_1 ordinátájára $3\cdot8-4y_1=48$, $y_1=-6$. A keresett kör érinti az y tengelyt, így ha a középpontja $K(u;v)$, akkor egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=u^2$. A $K(u;v)$ pont rajta van az E pontban az adott egyenesre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete: $4x+3y=14$.

A feltételek szerint

$$(8-u)^2+(-6-v)^2=u^2 \quad \text{és} \quad 4u+3v=14,$$

ahonnan $u=5$, $v=-2$ vagy $u=20$, $v=-22$. A keresett körök egyenlete:

$$(x-5)^2+(y+2)^2=25 \quad \text{vagy} \quad (x-20)^2+(y+22)^2=400.$$

8. *Határozzuk meg a*

$$\frac{4}{4\cdot2^{2x}-8\cdot2^{x-1}+\frac{11}{3}}$$

kifejezés értékkészletét, ha $-2\le x\le1$.

Megoldás. Azonos átalakításokkal

$$\frac{4}{4\cdot2^{2x}-8\cdot2^{x-1}+\frac{11}{3}}\equiv\frac{1}{(2^x)^2-2^x+\frac{11}{12}}\equiv\frac{1}{\left(2^x-\frac12\right)^2+\frac23}.$$

A megfelelő folytonos függvények alkalmazásával:

$$-2\le x\le1\Rightarrow2^{-2}\le2^x\le2^1\Rightarrow\frac14-\frac12\le2^x-\frac12\le2-\frac12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow0\le\left(2^x-\frac12\right)^2\le\frac94\Rightarrow\frac23\le\left(2^x-\frac12\right)^2+\frac23\le\frac{35}{12},$$

és végül

$$\frac{12}{35}\le\frac{1}{\left(2^x-\frac12\right)^2+\frac23}\le\frac32.$$

A kifejezés értékkészlete az adott intervallumon: $\left[\dfrac{12}{35};\dfrac32\right]$.

(A kifejezéssel adott függvény az adott intervallumban folytonos, ezért minden olyan y értéket felvesz, amelyre $\dfrac{12}{35}\le y\le\dfrac32$.)