Bevezető

2005 májusában új kétszintű vizsga várja az érettségizőket. Ebben a mellékletben elsősorban ennek a vizsgának a matematika fejezetével kapcsolatos információkat szeretnénk nyilvánosságra hozni. A vizsga leírása mellett a 2003 tavaszán „beüzemelt" próbafeladatsorokat, illetve ezek javítási útmutatóit közöljük, remélve, hogy diák és tanár felkészülését egyaránt segítik. Felhívjuk a figyelmet egyrészt arra, hogy a jelenlegi feladatsorok 11. osztályosoknak készültek, ezért a majdani feladatsorokban lehetnek más típusú feladatok is; másrészt arra, hogy ezek a próbaérettségik nem az érettségi színvonalának bemutatására, hanem az érettségiztetés szervezésének, ütemezésének előkészítésére születtek.

Emellett a „hagyományos" vizsgákra készülőkre is gondoltunk. Rábai Imre Tanár Úrnak a 2003 májusi számunkban közölt felvételi előkészítő feladatainak megoldásait, illetve a nemrég elhunyt Scharnitzky Viktor 20 feladatát és megoldásukat tanulmányozva olvasóink maguk vethetik egybe a középiskolát záró matematikavizsgák eddigi és eljövendő követelményeit.

Köszönjük a Kiss Árpád Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény vezetőjének és munkatársainak, és Scharnitzky Viktor özvegyének segítő közreműködését.

A szerkesztőség

A MATEMATIKA ÉRETTSÉGI VIZSGA ÁLTALÁNOS KÖVETELMÉNYEI

A vizsga formája

Középszinten: *írásbeli*
Emelt szinten: *írásbeli és szóbeli*

A matematika érettségi vizsga célja

A matematika érettségi vizsga célja annak vizsgálata, hogy a vizsgázó

- tud-e logikusan gondolkodni, rendelkezik-e megfelelő matematikai probléma- és feladatmegoldó, valamint absztrakciós, analizáló és szintetizáló képességgel;
- tud-e állításokat, egyszerűbb gondolatmenetű bizonyításokat szabatosan megfogalmazni, áttekinthető formában leírni;
- elsajátította-e a mindennapi életben használatos számolási technikákat, rendelkezik-e biztos becslési készséggel, az önellenőrzés igényével;
- képes-e statisztikai gondolatok megértésére, intelligens felhasználására, a függvény- vagy függvényszerű kapcsolatok felismerésére és értékelésére;
- képes-e a leírt síkbeli és térbeli szituációk elképzelésére, tud-e ezekhez ábrát készíteni, s ennek segítségével az adott konstrukcióban gondolkodni, számolni;
- képes-e a tanult ismereteket más tantárgyakhoz kapcsolódó feladatokban alkotó módon alkalmazni;
- képes-e hétköznapi szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, egy-egy gyakorlati kérdés megoldásához matematikai modellt alkotni, különböző problémamegoldó stratégiákat alkalmazni;
- képes-e a különböző matematikai segédeszközök (függvénytáblázat, zsebszámológép) célszerű alkalmazására; a mindenkori tárgyi feltételek függvényében, azokkal szinkronban a matematikai eszközökkel való problémamegoldásban a programozható számológép, a grafikus kalkulátor és a számítógép használata fokozatosan követelménnyé válhat.

Az emelt szinten a felsoroltakon túl az érettségi vizsga célja annak mérése, hogy a tanuló

- rendelkezik-e a felsőfokú matematikai tanulmányokhoz szükséges alapokkal;
- képes-e hipotéziseket megfogalmazni, és sejtéseit bizonyított állításaitól megkülönböztetni;
- milyen szintű kombinatív készséggel rendelkezik, mennyire kreatív a gondolkodása;

- képes-e gondolatmenetében érthetően, világosan alkalmazni a matematikai modellalkotás lépéseit (probléma megfogalmazása, matematikai formába öntése, összefüggések keresése, az eredmények matematikai módszerekkel történő kiszámítása, igazolása, értelmezése);

Az ismeretek legnagyobb része a középszinten és az emelt szinten egyaránt megjelenik. Ezen ismeretek feldolgozásában az emelt szintet az igényesebb felépítés, az összetettebb alkalmazás, a nehezebb feladatok jellemzik. A követelmények leírásában gyakran szereplő „szemléletes” jelző azt fejezi ki, hogy az adott fogalom matematikailag precíz ismerete nem követelmény. A matematika tanításában csak spirálisan lehet haladni, s így több téma, pl. az analízis – a felkészülésre fordítható idő alatt – a középiskolai tanulmányok végére is csak szemléletes formában tanítható meg, s csak bizonyos alkalmazásokat tesz lehetővé.

I. RÉSZLETES ÉRETTSÉGI VIZSGAKÖVETELMÉNY

Az érettségi követelményeit két szinten határozzuk meg:

középszinten a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;

az *emelt szint* tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Ezen túlmenően az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatók, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

KOMPETENCIÁK

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

- Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.
- Legyen képes kijelentéseket szabatosan megfogalmazni, azokat összekapcsolni, kijelentések igazságtartalmát megállapítani.
- Lássa az eltéréseket, illetve a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi nyelv között.
- A matematika minden területén és más tantárgyakban is tudja alkalmazni a halmaz fogalmát, illetve a halmazműveleteket.
- Legyen jártas alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában, s legyen képes ennek segítségével gyakorlati sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldására.
- Ismerje a gráfok jelentőségét, sokoldalú felhasználhatóságuk néhány területét, és legyen képes további felhasználási lehetőségek felismerésére a gyakorlati életben és más tudományágakban.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje a halmazelmélet alapvető szerepét a mai matematika felépítésében.

Számelmélet, algebra

- Legyen képes a tanuló betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a „betűk mögött”.
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit (pl. algebrai, grafikus, közelítő).
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket.
- Tudja az eredményeket előre megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e.
- Az *emelt szinten* érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is.

Függvények, az analízis elemei

- Legyen képes a tanuló a körülötte levő világ egyszerűbb összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek elemzéséből tudjon következtetni valóságos jelenségek várható lefolyására.
- Legyen képes a változó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Értse, hogy a függvény matematikai fogalom, két halmaz elemeinek egymáshoz rendelése. Ismerje fel a hozzárendelés formáját, elemezze a halmazok közötti kapcsolatokat.
- Lássa, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív egész számok halmazán értelmezett függvény. Ismerje a számtani és mértani sorozatot.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje az analízis néhány alapelemét, amelyekre más szaktudományokban is (pl. fizika) szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni, szélsőértéket, görbe alatti területet számolni.

Geometria, koordinátageometria, trigonometria

- Tudjon a tanuló síkban, illetve térben tájékozódni, térbeli viszonyokat elképzelni, tudja a háromdimenziós valóságot – alkalmas síkmetszetekkel – két dimenzióban vizsgálni.
- Vegye észre a szimmetriákat, tudja ezek egyszerűsítő hatásait problémák megfogalmazásában, bizonyításokban, számításokban kihasználni.
- Tudjon a feladatok megoldásához megfelelő ábrát készíteni.
- Tudjon mérni és számolni hosszúságot, területet, felszínt, térfogatot, legyen tisztában a mérési pontosság fogalmával.
- Ismerje a geometria szerepét a műszaki életben és bizonyos képzőművészeti alkotásokban.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák tudja szabatosan megfogalmazni a geometriai bizonyítások gondolatmenetét.

Valószínűségszámítás, statisztika

- Értse a tanuló a statisztikai kijelentések és gondolatmenetek sajátos természetét.
- Ismerje a statisztikai állítások igazolására felhasználható adatok gyűjtésének lehetséges formáit, és legyen jártas a kapott adatok áttekinthető szemléltetésében, különböző statisztikai mutatókkal való jellemzésében.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák tudjon egyszerűbb véletlenszerű jelenségeket modellezni és a valószínűségi modellben számításokat végezni.
- *Emelt szinten* ismerje a véletlen szerepét egyszerű statisztikai mintavételi eljárásokban.

II. A VIZSGA LEÍRÁSA

KÖZÉPSZINTŰ VIZSGA
A vizsga szerkezete

A középszintű matematika érettségi 180 perces írásbeli vizsga. Szóbeli vizsgát azok a tanulók tehetnek, akiknek az írásbeli vizsgájuk sikertelen (nem érték el az elégséges szintet), de az írásbeli vizsgapontszám 10%-át elérték. Mind az írásbeli, mind pedig a szóbeli vizsgán használható függvénytáblázat és számológép. Ezek paramétereit az egyes években kell meghatározni.

Írásbeli vizsga

Tartalmi szerkezet

A feladatsor tematikailag lefedi a követelményrendszer 5 nagy témakörét.

A feladatsor összeállításakor az alábbi tartalmi arányok az irányadók:

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	20%
Aritmetika, algebra, számelmélet	25%
Függvények, az analízis elemei	15%
Geometria, koordinátageometria, trigonometria	25%
Valószínűségszámítás, statisztika	15%

Ezek az arányok természetesen csak hozzávetőlegesek lehetnek, hiszen a feladatok egy jelentős része több témakörbe is besorolható, összetett ismeretkörre épül, továbbá a feladatsor választható feladatokat tartalmazó részei miatt az egyes tanulók számára – a választásaiktól függően – az arányok eltolódhatnak. Az első témakörbe tartozik a feladatoknak minden olyan részeleme, amely a szöveg matematikai nyelvre való lefordítását, matematikai modellalkotást igényel.

A feladatsor feladatainak 30–50%-a a hétköznapi élet problémáiból indul ki, esetenként egyszerű modellalkotást igénylő feladat.

A feladatsor jellemzői

A feladatsor két, jól elkülönülő részből áll.

Az *I. rész* 10-12 feladatot tartalmazó feladatlap, amely az alapfogalmak, definíciók, egyszerű összefüggések ismeretét hivatott ellenőrizni. Ebben a részben megjelenhet néhány igaz-hamis állítást tartalmazó vagy egyszerű feleletválasztós feladat is, de a feladatok többsége nyílt végű. Az első rész megoldására 45 perc áll rendelkezésre, vagyis ezen idő eltelte után e feladatok megoldására nincs tovább mód.

A feladatsor I. részében összesen *30 pont* érhető el.

A *II. rész* megoldási időtartama 135 perc. Ez további két részre oszlik, melynek megoldása folyamatos, az adott időn belül nem korlátozott.

A II./a rész 4, egyenként 12 pontos feladatot tartalmaz, amelyből 3-at kell megoldani, és csak ez a három értékelhető. Tehát a jelöltnek a négyből egyértelműen ki kell választania az értékelendő három feladatot. A feladatok egy vagy több kérdésből állnak.

A II./b rész 3, egyenként 17 pontos feladatot tartalmaz, amelyből 2-t kell megoldani, és csak ez a kettő értékelhető, a II./a részben leírtakhoz hasonlóan. A feladatok a középszintű követelmények keretein belül összetett feladatok, általában több témakört is érintenek és több részkérdésből állnak.

A II./a és II./b rész megoldására fordított időt a jelölt szabadon használhatja fel.

A vizsga bevezetését követő első években választás csak a II./b részben lesz felajánlva, tehát a II./a részben 3 kötelezően megoldandó feladatot tűzünk ki.

Értékelés

Az írásbeli vizsgán elérhető pontszám 100 pont.

A dolgozatok javítására részletes javítási útmutató szolgál. A javítási útmutató tartalmazza a feladatok részletes megoldását, esetenként több változatot is, valamint az egyes megoldási lépésekre adható részpontszámokat.

Szóbeli vizsga

Tartalmi szerkezet

A szóbeli vizsgára legalább 20 tételt kell készíteni, amennyiben a vizsgázó csoportban van szóbeli vizsgára utasított tanuló. A tételsor tartalmi arányai az írásbeli vizsga leírásánál meghatározott arányokat tükrözzék.

A tételek jellemzői

A tétel tartalmazzon 3 egyszerű elméleti kérdést (definíciót, tételkimondást), valamint 3 feladatot. A tétel egyes elemei más-más témakörből kerüljenek kiválasztásra.

Értékelés

A szóbeli vizsgán elérhető pontszám 50 pont.

Az értékelés szempontjai:

1. Az elméleti kérdés összesen	15 pont
2. A három feladat összesen	30 pont
3. Önálló teljesítményre való képesség, a feladatok logikus előadása, illetve a matematikai kommunikációs képesség	5 pont

Azt, hogy az utolsó 5 pontból mennyit kap a vizsgázó, annak a mérlegelésével kell eldönteni, hogy a jelölt milyen mértékben tudott önállóan megbirkózni a kérdésekkel, illetve a feladatokkal, ha segítő kérdésekre volt szüksége, azokat megértette-e és a feleletében fel tudta-e használni. Itt kell értékelni azt is, hogy mennyire volt logikus a felelet felépítése.

A szóbeli vizsgát is tett tanuló végső értékelése az írásbeli és a szóbeli vizsga együttes pontszáma alapján történik.

EMELT SZINTŰ VIZSGA
A vizsga szerkezete

Az emelt szintű matematika érettségi vizsga 240 perces írásbeli vizsgából és legfeljebb 20 perces szóbeli vizsgából áll. Mind az írásbeli, mind pedig a szóbeli vizsgán használható függvénytáblázat és számológép. Ezek paramétereit az egyes években kell meghatározni.

Írásbeli vizsga

Tartalmi szerkezet

A feladatsor tematikailag lefedi a követelményrendszer 5 nagy témakörét.

A feladatsor összeállításakor az alábbi arányok az irányadók:

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	25%
Aritmetika, algebra, számelmélet	20%
Függvények, az analízis elemei	20%
Geometria, koordinátageometria, trigonometria	20%
Valószínűségszámítás, statisztika	15%

Ezek az arányok természetesen csak hozzávetőlegesek lehetnek, hiszen a feladatok egy jelentős része több témakörbe is besorolható, összetett ismeretkörre épül, továbbá a feladatsor választható feladatokat tartalmazó részei miatt az egyes tanulók számára – a választásaiktól függően – az arányok eltolódhatnak. Az első témakörbe tartozik a feladatoknak minden olyan részeleme, amely a szöveg matematikai nyelvre való lefordítását, matematikai modellalkotást igényel.

A feladatsor feladatainak 30–40%-a szöveges, a hétköznapi élet problémáiból kiinduló, egyszerű modellalkotás alkalmazását igénylő feladat.

A feladatsor jellemzői

A feladatsor folyamatosan megoldandó, 2 különböző részből áll. A jelölteknek összesen 240 perc áll a rendelkezésükre, amit szabadon használhatnak fel. Az írásbeli vizsgán elérhető összpontszám *115 pont.*

Az *I. rész* 4 feladatból áll. Ezek az emelt szintű követelmények alapján egyszerűnek tekinthetők, többnyire a középszintű követelmények ismeretében is megoldhatók. (Ebben a részben nincs választási lehetőség.) A feladatok több részkérdést is tartalmazhatnak, az elérhető *összpontszám 51.*

A *II. rész* 5, egyenként 16 pontértékű feladatból áll. Ezek közül legalább kettőben a gyakorlati életben előforduló szituációból származik a probléma, így a megoldáshoz a vizsgázónak a szöveget le kell fordítania a matematika nyelvére, azaz matematikai modellt kell alkotnia, abban számításokat végeznie, s a kapott eredményeket az eredeti probléma szempontjából értelmezve kell válaszolnia a felvetett kérdésekre. A jelöltnek az öt feladatból négyet kell kiválasztani, megoldani, és csak ez a négy értékelhető. A feladatok általában egy-két témakör ismeretanyagára támaszkodnak. A II. rész megoldásával elérhető *összpontszám 64.*

Értékelés

A javítási útmutató tartalmazza a feladatok részletes megoldásait, azok lehetséges változatait, az egyes megoldási lépésekre adható részpontszámokat.

Szóbeli vizsga

Tartalmi szerkezet

A szóbeli vizsgára legalább 20 tételt kell készíteni. A tételsor tartalmi arányai az írásbeli vizsga leírásánál meghatározott arányokat tükrözzék.

A tételek jellemzői

Az egyes tételek egy-egy témakörből kerülnek összeállításra. minden tétel megköveteli a tanulótól

- egy definíció kimondását,
- egy tétel bizonyítását,
- egy feladat megoldását,
- valamint hogy mondjon példát az adott témakör alkalmazására a matematikán belül vagy azon kívül.

A tételeket úgy kell összeállítani, hogy a nehézségük közel azonos legyen. Mivel a bizonyítandó állítások nehézsége különböző, ezért a kiválasztott feladat összetettségével, illetve nehézségi fokával lehet kiegyensúlyozni az adott tétel nehézségi szintjét.

Értékelés

A szóbeli vizsgán elérhető pontszám 35.

Az értékelés szempontjai:

1. Az elméleti kérdések és a feladat összesen	25 pont
2. Az alkalmazásra mutatott példa	5 pont
3. Az önálló teljesítményre való képesség, a feladatok logikus előadása, illetve a szaknyelv használata és a matematikai kommunikációs képesség	5 pont

PRÓBAÉRETTSÉGI
2003. május-június
MATEMATIKA
KÖZÉPSZINT
I.

I. rész

1. Hány deciliter zsír van abban a fél literes tejeszacskóban, amelynek felirata szerint a zsírtartalma 2,8%? (*3 pont*)

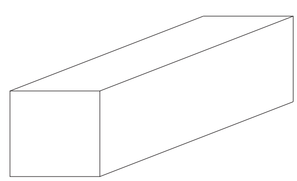
2. *a*) Mennyi $\log_2 32$ pontos értéke? (*2 pont*)

b) Írja fel a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ hatványt olyan alakban, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő! (*2 pont*)

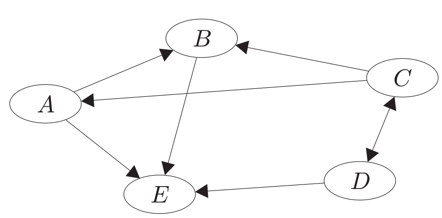
3. *c*) Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{3}{4-x} < 0. \quad (\textit{2 pont})$$

4. Legalább hány centiméter átmérőjű hengeres fatörzsből lehet kivágni olyan gerendát, amelynek keresztmetszete egy 20 cm × 21 cm-es téglalap? Válaszát indokolja! (*3 pont*)



5. Egy iskolai bajnokságban 5 csapat körmérkőzést játszik. (Mindenki mindenkivel egyszer játszik.) Az ábra az eddig lejátszott mérkőzéseket mutatja. A nyíl mindig a győztes felé mutat. Döntetlen esetén az összekötő vonal mindkét végén nyíl van. A csapat győzelem esetén 2 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot.



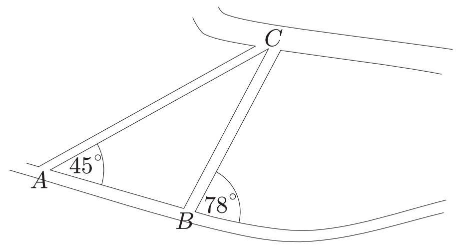
a) Kinek hány pontja van ebben a pillanatban? (*2 pont*)

A	B	C	D	E

b) Hány mérkőzés van még hátra? (*2 pont*)

6. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehér golyót tegyünk hozzá, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége 80% legyen? Válaszát indokolja! (*4 pont*)

7. Az Alföldön térképészeti méréseket végeznek. Egy egyenes útszakasz A pontjából is vezet egy út a C-vel jelölt faluba, és az út távolabbi B pontjából is. Teodolittal (vízszintes és magassági szögek mérésére egyaránt alkalmas műszerrel) megmérik azt, hogy az első út 45°-os, a második 78°-os szöget zár be az AB úttal.



Mekkora szögben látszik a faluból az AB útszakasz a teodolitban? (*2 pont*)

8. Júniusban a 30 napból 12 olyan nap volt, amikor 3 mm-nél több, és 25 olyan, amikor 7 mm-nél kevesebb csapadék esett.
a) Hány olyan nap volt, amelyen 7 mm vagy annál több csapadék esett? (*2 pont*)
b) Hány olyan nap volt, amikor 3 mm-nél több, de 7 mm-nél kevesebb csapadék esett? (*2 pont*)

9. Mennyi a $\sqrt{2}-1$ szám reciproka? Karikázza be a helyes válasz betűjelét!

a) $1-\sqrt{2}$ *b*) $1+\sqrt{2}$ *c*) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$
d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ *e*) 0.

(*2 pont*)

10. Állapítsa meg a valós számok halmazán értelmezett

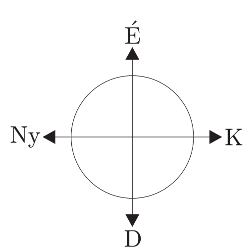
$$x \mapsto x^2-2x-8$$

függvény zérushelyeit! (*2 pont*)

II. rész
A

11. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:
a) $3^x \cdot 27 = 3^{2x+1}$. (*6 pont*)
b) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5-x^2}$. (*6 pont*)

12. Egy hajó a Csendes-óceán egy szigetéről elindulva 40 perc alatt 24 km-t haladt észak felé, majd az eredeti haladási irányhoz képest 65°-ot nyugat felé fordulva 42 km/h egyenletes sebességgel folytatta útját.



(A sebességváltoztatáshoz szükséges idő elhanyagolható.)

Az indulás után 2,5 órával a hajó zátonyra futott.

a) Mennyi utat kell a mentőhajónak megtennie, ha a legrövidebb úton közelíti meg a hajót? (*9 pont*)

b) Milyen irányba kell útnak indítani (az északi irányhoz képest mekkora szögben) a szigetről a mentőhajót, hogy leghamarabb érkezzen a segítség? (A mentőhajó is a szigetről indul.) (*3 pont*)

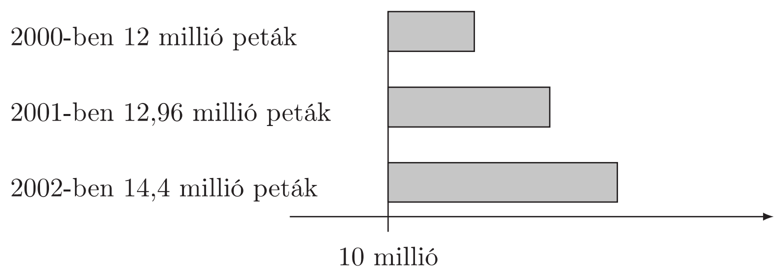
13. Adott egy háromszög három csúcspontja a koordinátáival: $A(-4;-4)$, $B(4;4)$ és $C(-4;8)$. Számítsa ki a C csúcsból induló súlyvonal és az A csúcsból induló magasságvonal metszéspontjának koordinátáit! (*12 pont*)

II. rész
B

A 14., 15., 16. feladatok közül tetszés szerint választott kettőt kell megoldania.

14. Bergengóciában az elmúlt 3 évben a kormány jelentése szerint kiemelt beruházás volt a bérlakások építése. Ezt az állítást az alábbi statisztikával támasztották alá.

Az egyes években a lakásépítésre fordított pénzösszegek:



a) Miért megtévesztő a fenti oszlopdiagram? (*3 pont*)

Valaki nem érzi meggyőzőnek ezt a statisztikát, és további adatokat keres. Kiderült, hogy 2000-ben 1 m^2 új lakás építése átlagosan 1000 petákba került, 2001-ben az építési költségek 20%-kal emelkedtek, 2002-ben pedig az előző évi ár 1/3-ával növekedtek a költségek.

b) Hogyan változott a három év során az egyes években újonnan megépített bérlakások összalapterülete? Válaszát számításokkal indokolja! (*8 pont*)

c) Lehet-e az új adatok alapján olyan oszlopdiagramot készíteni, amelyből a kormány jelentésével ellentétes következtetés is levonható? Ha igen, akkor készítse el! (*3 pont*)

d) Több lakást építettek-e 2002-ben, mint 2001-ben? Válaszát indokolja! (*3 pont*)

15. Az egyén által érzékelt (szubjektív) hangerősség és a hangforrás valódi (objektív) hangerőssége közötti összefüggés: $E = 10 \cdot \lg\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$, ahol I a $\dfrac{\text{watt}}{\text{m}^2}$-ben mért objektív hangerősség, E pedig a decibelben mért szubjektív hangerősség.

a) Az alig hallható suttogás objektív hangerőssége $I = 10^{-12}\ \dfrac{\text{watt}}{\text{m}^2}$, a hangszóróból áradó hangos zenéé pedig ennek 1 milliószorosa. Milyen erősségűnek érzik az emberek ezeknek a hangforrásoknak a hangját? (Mekkora a szubjektív hangerősség?) (*8 pont*)

b) Az 1000 Hz-es hangmagasságon süvítő repülőgép-motor hangosságát 130 decibelnek érzékeljük (3 méterről). Hányszorosa a motorzaj objektív hangerőssége a halk suttogásénak? (*9 pont*)

16. Egy háromlábú asztal lapja fél m^2 területű szabályos háromszöglap.

a) Legalább mekkora az átmérője annak a kör alakú terítőnek, amelyik teljesen lefedi az asztallapot? (*12 pont*)

b) Az asztalra olyan kör alakú dísztálat helyezünk, amelyik egyik irányban sem nyúlik túl az asztal peremén. Legfeljebb hány cm lehet a tál átmérője? (*5 pont*)

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

Kérjük, hogy a dolgozatok javítását a javítási útmutató alapján végezze, a következők figyelembevételével:

- Az 1. javító tanár piros tollal javítson, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölje a hibákat, hiányokat stb.
  A 2. javító tanár zöld tollat használjon, és az első javítótól függetlenül a tanári gyakorlatnak megfelelően ő is jelölje a hibákat, hiányokat stb.

- A feladatok mellett található üres négyzetek közül az 1. javító mindig az elsőt, a 2. javító mindig a másodikat töltse ki.
  Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a szürke négyzetekbe.
  Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük az egyes részpontszámokat is írja rá a dolgozatra.
- Kérjük, a dolgozat javítása után a füzetek belső borítóján található szürke táblázatot is töltse ki.
- ○ Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól eltérő megoldás születik, kérjük, hogy keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- ○ A pontozási útmutató pontjai további részpontokra nem bonthatók. Így, ha valamely részletre 3 pont adható, akkor az vagy 3 vagy 0 pontot jelent.
- ○ Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél kevésbé részletezett.
- ○ Ha a megoldásban számolási hiba, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- ○ Elvi hiba esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.

I. rész

1. feladat. 0,5 liter $\cdot$ 0,028 = 0,014 liter. 2 pont
0,14 dl. 1 pont
(Az átváltás és a százalékszámítás sorrendje tetszőleges.)

Összesen: 3 pont

2. feladat.
a) $\log_2 32 = 5$. 2 pont

Összesen: 2 pont

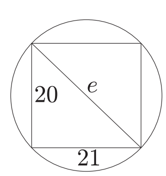
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{3^5}{2^5} = \frac{3^5}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = 7{,}59375.$ 2 pont
(Bármilyen helyes megoldás elfogadható.)

Összesen: 2 pont

3. feladat. $4 - x < 0$. 1 pont
$x > 4$. 1 pont

Összesen: 2 pont

4. feladat. $e^2 = 21^2 + 20^2$. 1 pont



$e = 29$ cm.
(Mértékegység nélkül a 2 pontból 1 pont adható.) 2 pont

Összesen: 3 pont

5. feladat.

a)

A	B	C	D	E
2	4	1	1	6

2 pont

(Ez a két pont akkor adható, ha legalább 4 válasz helyes. 1 pont akkor adható, ha 2 vagy 3 jó válasz van.)

Összesen: 2 pont

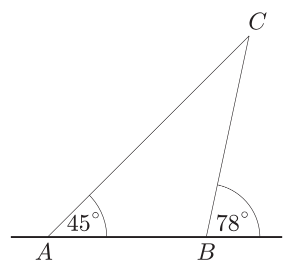
b) 3 mérkőzés van még hátra. 2 pont

Összesen: 2 pont

6. feladat. x legyen a fehér golyók száma.
$5 + x$ golyó van összesen.
$\frac{x}{x+5} = 0{,}8.$
(Az egyenlet felírásáért vagy jó gondolatmenetért.) 2 pont
$x = 0{,}8x + 4,$
$0{,}2x = 4,$
$x = 20.$
(A jó végeredményért.) 2 pont

Összesen: 4 pont

7. feladat. A C csúcsnál lévő belső szög:
$\gamma = 78^\circ - 45^\circ = 33^\circ.$ 2 pont



Összesen: 2 pont

8. feladat. *a*) $30 - 25 = 5$ nap. 2 pont

Összesen: 2 pont

b) $12 + 25 - x = 30,$
$x = 7$ nap.
(Indoklás és mértékegység nélkül is jár a pont.) 2 pont

Összesen: 2 pont

9. feladat.
A *b*) válasz a jó. 2 pont

Összesen: 2 pont

10. feladat. $x^2 - 2x - 8 = 0$ egyenlet gyökei lesznek a zérushelyek:
$x_1 = -2.$ 1 pont
$x_2 = 4.$ 1 pont
(Nem szükséges a megoldóképlet részletezése.)

Összesen: 2 pont

II./A rész

11. feladat.

a) *1. megoldás:*

$27 \cdot 3^x = 3 \cdot 3^{2x}$. 1 pont

$3^{2x} - 9 \cdot 3^x = 0$. 1 pont

$3^x(3^x - 9) = 0$.

(Vagy a megoldóképlet alkalmazása.) 1 pont

$3^x = 0$, ennek nincs megoldása, 1 pont

vagy $3^x = 9$, tehát $x = 2$. 1 pont

(Ha 3^x-ből nem számol x-et, akkor összesen 3 pont adható.)

Ellenőrzés. 1 pont

2. megoldás:

$3^x \cdot 3^3 = 3^{2x+1}$. 1 pont

$3^{x+3} = 3^{2x+1}$. 2 pont

$x + 3 = 2x + 1$. 1 pont

$x = 2$. 1 pont

Ellenőrzés. 1 pont

Összesen: 6 pont

b) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5 - x^2}$.

$3x + 1 = 5 - x^2$. 1 pont

$x^2 + 3x - 4 = 0$. 1 pont

$x_1 = 1$. 1 pont

$x_2 = -4$. 1 pont

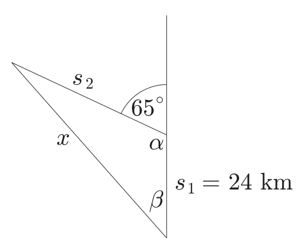
Ellenőrzés: -4 hamis gyök. 1 pont

Az $x = 1$ a megoldás. 1 pont

(Ha az értelmezési tartomány helyes felírásából derül ki, hogy melyik a jó megoldás, akkor is jár a 6 pont.)

Összesen: 6 pont

12. feladat. *a)*



1 pont

(A jó ábra 1 pontot ér, de a kifogástalan megoldás ábra nélkül is 12 pontos.)

Az elfordulás utáni út menetideje:

$t_2 = 150 - 40 = 110$ perc,

$t_2 = \dfrac{11}{6}$ h.

(t_2 megállapításáért.) 1 pont

Az elfordulás utáni út: $s = v \cdot t$.

$s_2 = \dfrac{11}{6}\ \text{h} \cdot 42\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. 1 pont

$s_2 = 77$ km. 1 pont

(s_2 kiszámításáért összesen 2 pont.)

$\alpha = 115°$. 1 pont

$x^2 = 24^2 + 77^2 - 2 \cdot 24 \cdot 77 \cdot \cos 115°$.

(A koszinusz tétel helyes felírásáért összesen 2 pont.) 2 pont

$x^2 = 8066{,}98$,

$x = 89{,}8$ km. 2 pont

(Mértékegység nélkül csak 1 pont jár. Nem számít hibának, ha mértékegységet csak a végeredményben tüntet fel a vizsgázó, amennyiben közben helyesen számol.)

Összesen: 9 pont

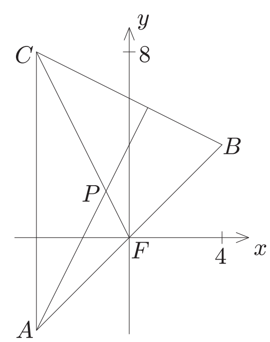
$b)$ $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{s_2}{x}$. 1 pont

$\sin\beta = \sin 115^\circ \cdot \dfrac{77}{89{,}8} = 0{,}7771.$ 1 pont

$\beta = 50{,}99^\circ \approx 51^\circ.$ 1 pont

Összesen: 3 pont

13. feladat. A magasságvonal egyenlete:
$\mathbf{n} = \overrightarrow{BC}(-8; 4).$ 2 pont
$\mathbf{n}(-2; 1),$
$A(-4; -4),$
$-2x + y = 4.$ 3 pont
(A magasságvonal egyenletéért 5 pont.)



A súlyvonal egyenlete:
$F(0; 0).$ 1 pont
$\overrightarrow{FC}(-4; 8).$ 1 pont
$\mathbf{n}(8; 4) = (2; 1).$ 1 pont
$2x + y = 0.$ 2 pont
(A súlyvonal egyenletéért 5 pont.)
A metszéspontjuk az egyenletrendszer megoldása:
$P(-1; 2).$
(A metszéspont kiszámításáért 2 pont.) 2 pont
(Ha egy pontos rajzról leolvassa a jó végeredményt, akkor összesen 3 pont adható.)

Összesen: 12 pont

II./B rész

Az alábbi három feladat (14–16.) közül tetszés szerint választott *kettőt* kellett megoldani és *kettőt* kell értékelni!

14. feladat. $a)$ Az oszlopok hossza nem arányos az ábrázolt mennyiségekkel, így az ábra jóval nagyobb növekedést sugall, mint a valóság. 3 pont

Összesen: 3 pont

$b)$ 2000: 1000 peták/m^2,
2001: 1200 peták/m^2, 1 pont
2002: 1600 peták/m^2. 1 pont

2000: $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^7}{10^3} = 12\,000$ m^2 új lakás épült. 1 pont

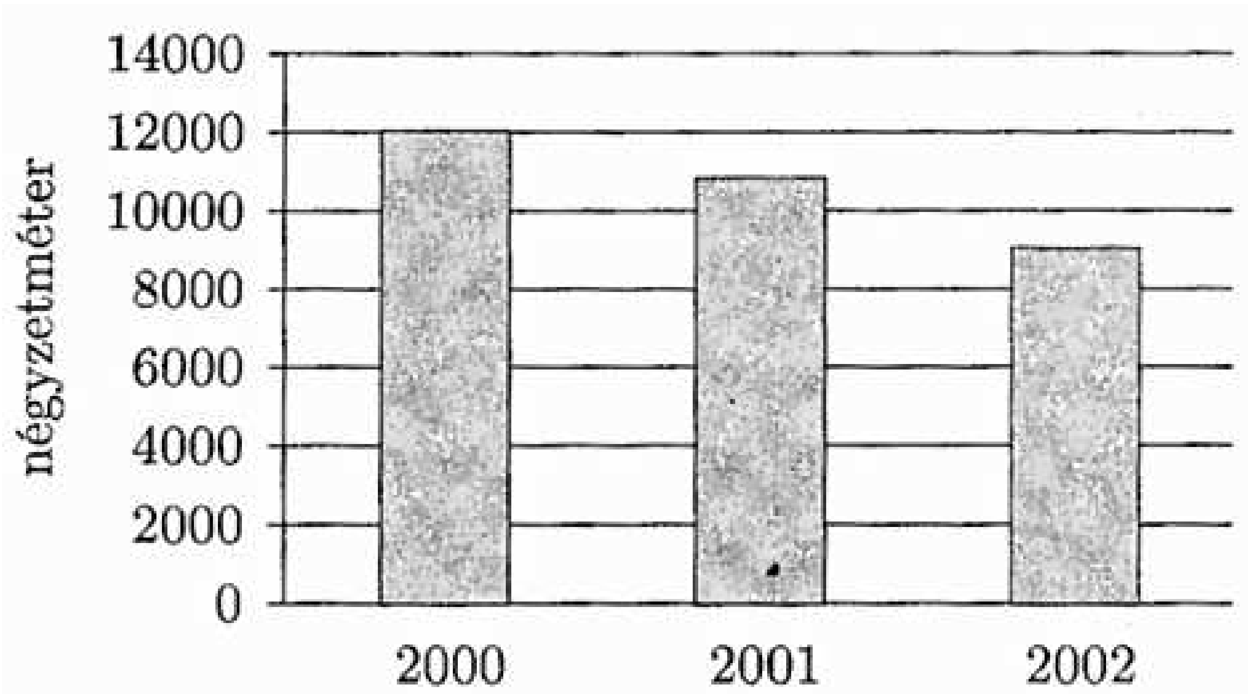
2001: $\dfrac{1{,}296 \cdot 10^7}{1200} = 10\,800$ m^2 új lakás épült. 1 pont

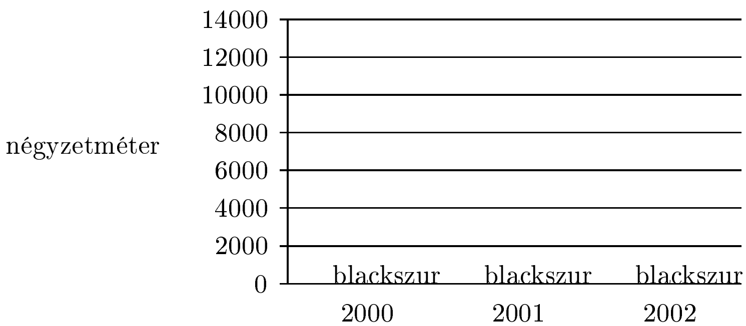
2002: $\dfrac{1{,}44 \cdot 10^7}{1600} = 9000$ m^2 új lakás épült. 1 pont

Tehát az egy év alatt felépített bérlakások összes alapterülete évről évre csökkent. 3 pont

Összesen: 8 pont

c)





3 pont

Összesen: 3 pont

d) A megadott adatokból nem állapítható meg, mert nem tudjuk egy-egy lakás alapterületét (ami igen változó lehet).
3 pont

Összesen: 3 pont

15. feladat. *a*) $E_1 = 10 \cdot \lg \dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}$.
(A képlet értelmezéséért.) 2 pont
$E_1 = 10 \cdot \lg 1 = 0$ decibel.
(Mértékegység nélkül 1 pont.) 2 pont
$E_2 = 10 \cdot \lg \dfrac{10^{-6}}{10^{-12}}$.
(A képlet értelmezéséért.) 2 pont
$E_2 = 10 \cdot \lg 10^6 = 60$ decibel.
(Mértékegység nélkül 1 pont.) 2 pont

Összesen: 8 pont

b) $I = 10^{-12}\ \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.
Legyen E_{m} a motor szubjektív hangerőssége,
I_{m} az objektív hangerőssége.
$E_{\mathrm{m}} = 130$ decibel.
(Az adat értelmezéséért.) 1 pont

$130 = 10 \cdot \lg \dfrac{I_\mathrm{m}}{10^{-12}}$.

(Az egyenlet felírásáért.) 3 pont

$13 = \lg \dfrac{I_\mathrm{m}}{10^{-12}}$. 1 pont

$10^{13} = \dfrac{I_\mathrm{m}}{10^{-12}}$.

(A logaritmus értelmezéséért.) 3 pont

Tehát a motorzaj objektív hangerőssége a halk suttogásénak 10^{13}-szorosa. 1 pont

Összesen: 9 pont

16. feladat. *a)* $T = \dfrac{a \cdot m}{2}$, ahol $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, tehát $T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0{,}5$. 2 pont

$a = \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1{,}07$. 2 pont

A köré írható kör átmérőjét keressük. 1 pont

A sugár a súlyvonal 2/3-ad része. 1 pont

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3}$. 2 pont

$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$. 1 pont

Legalább 125 cm átmérőjű terítő kell.

(124 cm is elfogadható. Ha kerekítés miatt ennél kisebb értéket kap, akkor ez a pont nem jár.) 1 pont

Összesen: 10 pont

b)

1. megoldás:

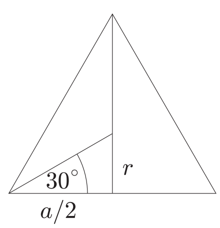
A beírt kör sugarát keressük, ami a körülírt kör sugarának a fele.

$r = \dfrac{R}{2}$. 5 pont

Tehát a tál átmérője: 0,62 m = 1 pont

= 62 cm. 1 pont

2. megoldás:



1 pont

$\mathrm{tg}\, 30^\circ = \dfrac{r}{a/2}$. 2 pont

$r = \dfrac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\, 30^\circ$. 1 pont

$r = 0{,}31$. 1 pont

$d = 0{,}62$ m. 1 pont

$d = 62$ cm. 1 pont

Összesen: 7 pont

PRÓBAÉRETTSÉGI
2003. május-június
MATEMATIKA
EMELT SZINT

I. rész

1. Adott két egyenes egyenlete:

$$e:\ 3x - y = 2$$

$$f:\ x + 3y = -6$$

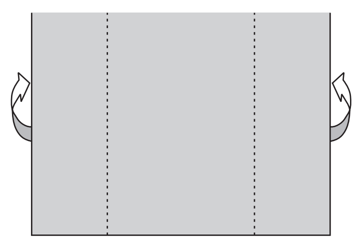
a) Határozza meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit! (*2 pont*)
b) Számítsa ki a két egyenes hajlásszögét! (*5 pont*)
c) Mekkora távolságra van az origó az e egyenestől? (*5 pont*)

2. Tekintse az alábbi táblázatot!

Korcsoport	A nők száma (ezer főben)	Ezer nőre jutó szülések száma	A nők száma (ezer főben)	Ezer nőre jutó szülések száma
	1930	1930	1995	1995
15–19	253	40,9	417	33,6
20–24	217	158,5	372	113,9
25–29	181	151,8	331	110,3
30–34	173	110,7	305	50,2
35–39	194	74,8	382	17,2
40–44	205	15,7	418	2

a) Hány gyerek született összesen 1930-ban és hány született 1995-ben? (*4 pont*)
b) Hány százalékkal nőtt vagy csökkent a szülések száma 1930 és 1995 között 1930-hoz képest? (*2 pont*)
c) Hány százalékkal nőtt vagy csökkent az ezer nőre jutó szülések száma 1930 és 1995 között 1930-hoz képest? (*4 pont*)
d) Egy 1995 szilveszterén készült TV-interjúhoz véletlenszerűen választottak ki egy riportalanyt a 20–24 év közötti nő lakosok közül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott nő szült abban az évben? Válaszát indokolja! (*3 pont*)

3. Egy 80 cm széles bádoglemez két párhuzamos szélének egyforma felhajtásával téglalap keresztmetszetű vízlevezetőt készítünk úgy, hogy a víz a lehető leggyorsabban folyjon át rajta. (Ez akkor következik be, ha a keresztmetszetének a területe a lehető legnagyobb.)



a) Határozza meg a felhajtott rész szélességét! (*11 pont*)
b) Határozza meg, mekkora a lehető legnagyobb keresztmetszet területe! (*2 pont*)

4. Egy repülőgépnek 2400 km utat kellett megtennie. Az út első harmadában a rossz időjárási viszonyok miatt az eredetileg tervezett sebességét 25%-kal csökkentette.
a) Az eredetileg tervezetthez képest hány százalékkal kellene növelnie a sebességét az út hátralevő részében, ha késés nélkül szeretne leszállni? (*6 pont*)
b) Sajnos az időjárás nem javult lényegesen, így a gép az út második részében az *eredetileg tervezett sebességénél* 160 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val kisebb sebességgel tudott haladni. Mekkora volt az eredetileg tervezett átlagsebessége és menetideje, ha így egy óra késéssel érkezett a célállomásra? (*7 pont*)

II. rész

Az alábbi öt feladat (5.–9.) közül tetszés szerint választott *négyet* kell megoldania!

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán:

$$16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0. \quad (\textit{16 pont})$$

6. *a*) Igazolja, hogy az $n^3 - n$ kifejezés osztható hattal, ha n természetes szám! (*5 pont*)
b) Melyek azok a k egész számok, amelyekre a $k^2 - 3k$ kifejezés egy prímszám négyzetével egyenlő? (*11 pont*)

7. *a*) Legalább hány tanuló jár abba az iskolába, ahol a tanulók megkérdezése nélkül is tudjuk, hogy biztos van három olyan diák, aki ugyanazon a napon ünnepli a születésnapját? (*4 pont*)

Az iskolában 3 különböző szakkör működik: dráma, fotó, népi tánc. Egy 22 fős osztály minden tanulója legalább az egyik szakkörön részt vesz. Az osztályfőnök számítógépes nyilvántartást vezet a tanulókról, amelyben egy számhármassal jellemzi azt, hogy ki melyik szakkörre jár. Az első szám a dráma, a második a fotó, a harmadik a népi táncra vonatkozik. Egyes jelzi, ha valaki részt vesz a szakkör munkájában, nulla, ha nem. Pl. ha egy diák a drámaszakkörre jár, a fotóra nem és a néptáncra igen, az azt jelenti, hogy az ő kódszáma: $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$

b) Hány különböző számhármas szerepelhet a tanár nyilvántartásában? (*3 pont*)

c) Mutassa meg, hogy van legalább 4 olyan tanuló, aki pontosan ugyanazokat a szakköröket látogatja! (*6 pont*)

d) A 22 tanulóból pontosan két szakkört látogat 16 tanuló, és van 3 olyan, aki mindegyikre jár. Hány tanuló jár pontosan egy szakkörre? (*3 pont*)

8. Legyen adott a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = |x| + |x-4| \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{2}{7}x + 10$$

függvény.

a) Mely x értékek esetén teljesül, hogy $f(x) = g(x)$? (*9 pont*)

b) Értelmezzük a h függvényt a $[-5;10]$ intervallumon a következőképpen:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{ha } g(x) \geq f(x). \end{cases}$$

Ábrázolja az f, a g és a h függvényeket a $[-5;10]$ intervallumon, közös koordinátarendszerben! (*7 pont*)

9. Egy vízszintes egyenes úton haladunk. Az út bal oldalán a hegy tetején egy kilátót veszünk észre. Ennek a kilátónak a tetejét az útról 30°-os emelkedési szögben látjuk. Fél km-t továbbhaladva az emelkedési szög már 45°-os. Újabb 500 méter megtétele után már 60°-os az emelkedési szög. Milyen magasan van az úthoz képest a kilátó teteje? Készítsen ábrát! (*16 pont*)

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

I. rész

1. feladat. *a*) $y = 3x - 2$.
$x + 3(3x-2) = -6$.
$x = 0$, $y = -2$.
$M(0;-2)$. 2 pont

(Bármilyen rendezéssel eljuthat az x és y értékéig. Pontos rajz és annak leolvasása esetén 1 pont adható.)

Összesen: 2 pont

b) $\mathbf{n}_e(3;-1)$. 1 pont
$\mathbf{n}_f(1;3)$. 1 pont
$|\mathbf{n}_e| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$,
$|\mathbf{n}_f| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
(A vektorok hosszának meghatározásáért.) 1 pont
$3 - 3 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha$.
(A skalárszorzat kétféle felírásáért.) 1 pont
$\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$. 1 pont

(Ha a normálvektorok vagy az irányvektorok skaláris szorzatából vagy a meredekségekből veszi észre, hogy a két egyenes egymásra merőleges, természetesen akkor is jár az 5 pont. Ha a pontos rajzról olvassa le a szöget, akkor 1 pont jár.)

Összesen: 5 pont

c) Az origón átmenő, az e egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x + 3y = 0$. 2 pont

Ennek metszéspontja az e egyenessel: $T\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. 2 pont

Ennek távolsága az origótól: $\frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}63$. 1 pont

(Ha a pont–egyenes távolságképletével vagy más módon számol, akkor is jár az 5 pont.)

Összesen: 5 pont

2. feladat. *a*) Súlyozott számtani átlaggal kell számolni.

1930:

$253 \cdot 40{,}9 + 217 \cdot 158{,}5 + 181 \cdot 151{,}8 + 173 \cdot 110{,}7 + 194 \cdot 74{,}8 + 205 \cdot 15{,}7 = 109\,098{,}8.$ 1 pont

Tehát 1930-ban 109 099 gyerek született. 1 pont

1995:

$417 \cdot 33{,}6 + 372 \cdot 113{,}9 + 331 \cdot 110{,}3 + 305 \cdot 50{,}2 + 382 \cdot 17{,}2 + 418 \cdot 2 = 115\,608{,}7.$ 1 pont

Tehát 1995-ben 115 609 gyerek született. 1 pont

Összesen: 4 pont

b) A születések számának változása:

$$\frac{115\,609 - 109\,099}{109\,099} \cdot 100 \approx 6.$$ 1 pont

Tehát 6%-os a növekedés. 1 pont

Összesen: 2 pont

c) Az 1000 nőre jutó születések számának változása:

1930-ban 1000 nőre $\dfrac{109\,098{,}8}{1223} = 89{,}2$ szülés jutott. 1 pont

1995-ben 1000 nőre $\dfrac{115\,609}{2225} = 52{,}0$ szülés jutott. 1 pont

A második adat az elsőnek $100 \cdot \dfrac{52{,}0}{89{,}2} = 58,3\%$-a. 1 pont

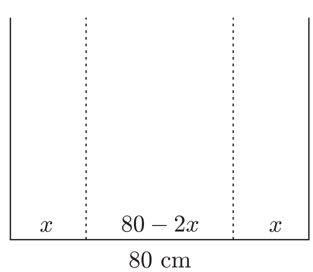
Tehát 41,7%-os a csökkenés. 1 pont

Összesen: 4 pont

d) Az adott korosztályba (20–24) tartozó nőknek 113,9 ezreléke szült gyereket, ami 11,39%-os valószínűséget jelent. (Az indoklás nélküli válaszért nem jár pont, ha nem teljes az indoklás, akkor kevesebb is adható.) 3 pont

Összesen: 3 pont

3. feladat. *a*) Legyen a felhajtott rész szélessége x.



Többféle megoldást is megadunk, ezért alapvetően a következők szerint bontjuk az *a*) rész pontszámát:

A függvény felírásáért. 2 pont

A szélsőérték helyének jó meghatározásáért.

(Ha a függvény felírása után a maximum helyét a lépések részletezése nélkül állapítja meg, akkor is kapja meg a teljes pontszámot.) 8 pont

Mértékegységgel megadott válaszért. 1 pont

1. megoldás:

A keresztmetszet területe, amelynek a maximumát keressük:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x).$ 2 pont

$T(x) = -2x^2 + 80x.$ 2 pont

Teljes négyzetté alakítva: $T(x) = -2(x - 20)^2 + 800.$ 3 pont

A negatív előjel miatt a függvénynek maximuma van. 2 pont

A maximum helye: $x_{\max} = 20.$ 1 pont

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm.

(A mértékegység helyes feltüntetéséért.) 1 pont

2. megoldás:

A keresztmetszet területe, amelynek a maximumát keressük:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x)$. 2 pont

$T(x) = -2x^2 + 80x$. 2 pont

Deriváltja: $T'(x) = -4x + 80$. 2 pont

$T'(x) = 0$. 1 pont

$-4x + 80 = 0$. 1 pont

$x = 20$. 1 pont

$T''(20) = -4 < 0$, azaz maximuma van. 1 pont

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm.

(A mértékegység helyes feltüntetéséért.) 1 pont

3. megoldás:

Számtani és mértani közép segítségével:

$(80 - 2x) \cdot x$ maximumát keressük. 2 pont

Nézzük a függvény kétszeresét, annak ugyanott van a maximuma:

$(80 - 2x) \cdot 2x \le \left[\dfrac{(80 - 2x) + 2x}{2}\right]^2$. 3 pont

$(80 - 2x) \cdot 2x \le 40^2 = 1600$. 1 pont

Maximum ott van, ahol a két tényező egyenlő: 2 pont

$80 - 2x = 2x$. 1 pont

$x = 20$. 1 pont

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm.

(A mértékegység helyes feltüntetéséért.) 1 pont

4. megoldás:

$T(x) = x \cdot (80 - 2x)$. 2 pont

A kapott konkáv parabola 2 pont

zérushelyei: 0 és 40. 3 pont

A maximum helye tehát $x = 20$. 3 pont

Tehát a felhajtott rész szélessége 20 cm.

(A mértékegység helyes feltüntetéséért.) 1 pont

Összesen: 11 pont

b) Értéke: $T_{\max} = 800\ \text{cm}^2$. 2 pont

Összesen: 2 pont

4. feladat. *a*) Az eredetileg tervezett sebesség: v.

Az eredetileg tervezett menetidő: $t = \dfrac{2400}{v}$.

Az út első harmada: 800 km.

Ezen a részen az átlagsebessége: $0{,}75v$.

A menetidő: $t_1 = \dfrac{800}{0{,}75v}$.

Az út másik része: 1600 km.

Ezen a részen az átlagsebessége: x.

A menetidő: $t_2 = \dfrac{1600}{x}$.

$t = t_1 + t_2$.

$\dfrac{2400}{v} = \dfrac{800}{0{,}75v} + \dfrac{1600}{x}$.

(Az egyenlet felírásáért.) 3 pont

$x = 1{,}2v$.

(Az egyenlet megoldásáért.) 2 pont

Tehát 20%-os sebességnövelésre van szükség.

(A % megállapításáért.) 1 pont

Összesen: 6 pont

b) A sebesség $160\dfrac{km}{h}$-val csökken, ezért az út második részén az átlagsebesség: $v - 160$.

A menetidő: $t_2' = \dfrac{1600}{v - 160}$.

$t + 1 = t_1 + t_2'$.

$\dfrac{2400}{v} + 1 = \dfrac{800}{0{,}75v} + \dfrac{1600}{v-160}$.

(Az egyenlet felírásáért.) 3 pont

Az egyenletrendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:
$0{,}75v^2 - 320v - 160\,000 = 0$.
(Az egyenlet rendezéséért.) 2 pont

Ennek pozitív gyöke: $v = 722{,}1$.
Tehát az eredeti sebesség 722,1 km/h.
(A gyök kiszámításáért és értelmezéséért.) 1 pont

A tervezett menetidő: $t = \dfrac{2400}{722{,}1} \approx 3{,}32$.

A tervezett menetidő 3,32 óra.
(A menetidő meghatározásáért.) 1 pont

(Ha az eredeti sebesség helyett az a)-ban kiszámolt értéket csökkenti 160-nal (szövegértési hiba) és ezzel az értékkel mindent jól kiszámol, akkor 5 pont jár.)

Összesen: 7 pont

II. rész

Az alábbi öt feladat (5.–9.) közül a tanulónak tetszés szerint választott *négyet* kellett megoldani és *négyet* kell értékelni!

5. feladat.

1. megoldás:

A másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nemnegatív:
$64\cos^2 y - 64 \geq 0$. 3 pont

$\cos^2 y \geq 1$. 1 pont

Ez csak akkor teljesülhet, ha $\cos y = \pm 1$.
(Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár.) 3 pont

(A $\cos y$ lehetséges értékeinek a meghatározásáért összesen 7 pont.)

Ha $\cos y = 1$, akkor $y = 2k\pi$, 1 pont

ahol $k \in \mathbb{Z}$. 1 pont

$16x^2 - 8x + 1 = 0$. 1 pont

$x = \dfrac{1}{4}$. 1 pont

Az egyik megoldás: $\left(\dfrac{1}{4}; 2k\pi\right)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

(Az egyik gyöksorozat felírásáért összesen 4 pont.)

Ha $\cos y = -1$, akkor $y = \pi + 2k\pi$, 1 pont

ahol $k \in \mathbb{Z}$. 1 pont

$16x^2 + 8x + 1 = 0$. 1 pont

$x = -\dfrac{1}{4}$. 1 pont

A másik megoldás: $\left(-\dfrac{1}{4}; \pi + 2k\pi\right)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

(A másik gyöksorozat felírásáért összesen 4 pont.)

Ellenőrzés: 1 pont

– ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát a kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

– behelyettesítéssel.

(Ha csak az egyik gyöksorozatot találja meg és azt ellenőrzi, akkor is megkapja az 1 pontot.)

2. megoldás:

A megoldóképletet alkalmazva:

$$x = \frac{8\cos y \pm \sqrt{64\cos^2 y - 64}}{32}.$$ 2 pont

$$x = \frac{\cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}}{4}.$$ 1 pont

Ez akkor értelmezhető, ha $\sin y = 0$. 1 pont

Ekkor $\cos y = \pm 1$.
(Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár.) 3 pont

(Eddig összesen 7 pont.)

Innen kezdve ld. az *1. megoldást.*

Összesen: 16 pont

6. feladat.

a) $n^3 - n = n(n^2-1) =$ 1 pont

$= n(n+1)(n-1).$ 1 pont

Három szomszédos szám közül az egyik biztosan páros, ezért osztható 2-vel, és 1 pont

van közöttük biztosan hárommal osztható is, 1 pont

ezért a szorzatuk osztható 6-tal. 1 pont

Összesen: 5 pont

b) 1. megoldás:

A feltétel szerint $k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.

A fenti egyenlet $k \cdot (k-3) = p^2$ alakban írható fel.

(Átírás szorzat alakba.) 2 pont

A jobboldal: $1 \cdot p^2$, (1) 1 pont

vagy $p \cdot p$, (2) 1 pont

vagy $(-1) \cdot (-p^2)$ (3) lehet. 1 pont

(Az esetek szétválasztásáért összesen 3 pont jár.)

(1) Ha $k = 1$ és $k - 3 = p^2$, akkor $p^2 = -2$, ami nem lehet. 1 pont

Ha $k - 3 = 1$, és $k = p^2$, akkor $k = 4$, tehát $p^2 = 4$, azaz $p = 2$. 1 pont

(Az (1) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.)

(2) $k = k - 3$, ami nem lehetséges.

(A (2) eset vizsgálatáért 1 pont jár.) 1 pont

(3) Ha $k = -1$ és $k - 3 = -p^2$, akkor $p^2 = 4$, tehát $p = 2$. 1 pont

Ha $k - 3 = -1$ és $k = -p^2$, akkor $k = 2$, tehát $p^2 = -2$, ami nem lehet. 1 pont

(A (3) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.)

A feladat feltételeinek a $k = 4$ és a $k = -1$ felel meg. 1 pont

Ez esetekben lesz a $k^2 - 3k$ kifejezés egy prímszám, a 2 négyzetével egyenlő.

2. megoldás:

A feltétel szerint $k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.

$k^2 - 3k$ kifejezés mindenképpen páros, mert 2 pont

– ha k *páros,* akkor két páros szám különbsége páros, 2 pont

– ha k *páratlan,* akkor két páratlan szám különbsége szintén páros. 2 pont

Így tehát p^2 is páros.

Ha p^2 páros, akkor p csak 2 lehet. 2 pont

Így $k^2 - 3k = 4$, 1 pont

ahonnan $k = 4$, 1 pont

vagy $k = -1$. 1 pont

Összesen: 11 pont

7. feladat *a)* 366 különböző születésnap lehet.

(365 nap esetén is jár a pont.) 1 pont

Ha minden napra legfeljebb 2 születésnap esik, akkor legfeljebb $366 \cdot 2 = 732$ tanulója van az iskolának.

(365 nap esetén 730.) 1 pont

A 733. tanulónak már biztosan van 2 azonos napon született társa.

(365 nap esetén 731.) 1 pont

Tehát legalább 733-an járnak az iskolába.

(365 nap esetén 731.) 1 pont

(Ha nincs részletes szöveges magyarázat, de a gondolatmenet egyértelműen jó, akkor is megadható a 4 pont.)

Összesen: 4 pont

b) Mindhárom helyre 2 lehetőségünk van, így $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetséges számhármas van. 1 pont

A 000 nem lehet, 1 pont

ezért összesen 7 marad. 1 pont

(Ha módszeresen összeszámlálja a lehetséges eseteket, akkor az 3 pont. Ha az összeszámlálásban téved, akkor legfeljebb 1 pont adható.)

Összesen: 3 pont

c) 7 különböző lehetőség van. 1 pont
Ha mindegyikbe 3 tanuló tartozik, akkor $7 \cdot 3 = 21$ tanuló lenne. 3 pont
De 22 van, ezért valamelyik csoportban 4 tanuló lesz.
(Ez halmazábrán is megmutatható.) 2 pont

Összesen: 6 pont

d) $22 = 16 + 3 + x$. 2 pont
$x = 3$. 1 pont

Összesen: 3 pont

8. feladat. *a*)

$$|x| + |x - 4| = -\frac{2}{7}x + 10.$$ 1 pont

Ha $x < 0$, akkor:

$$-x - x + 4 = -\frac{2}{7}x + 10.$$ 1 pont

$x = -\frac{7}{2}$, és ez benne van a vizsgált intervallumban.
(Szöveges indoklás helyett más jelölés is megfelelő.) 1 pont
Ha $0 \le x \le 4$, akkor: 1 pont

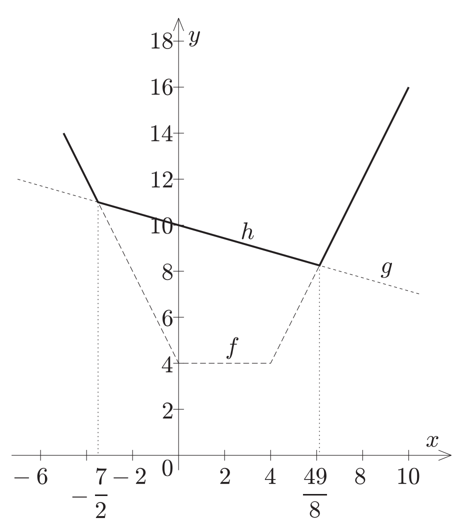
$$x - x + 4 = -\frac{2}{7}x + 10.$$ 1 pont

$x = 21$, de ez nincs benne a vizsgált intervallumban. 1 pont
Ha $x \ge 4$, akkor: 1 pont

$$x + x - 4 = -\frac{2}{7}x + 10.$$ 1 pont

$x = \frac{49}{8}$, és ez benne van a vizsgált intervallumban. 1 pont
(A három eset vizsgálatáért 3–3 pont jár.)

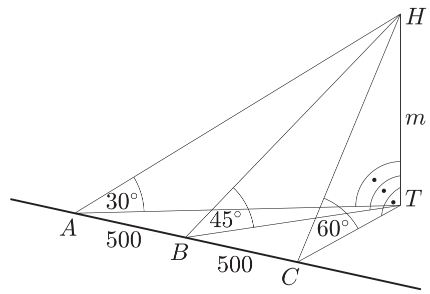
Összesen: 9 pont



b) f ábrázolása 3 pont
g ábrázolása 1 pont
h ábrázolása 3 pont

Összesen: 7 pont

9. feladat. Az első pont A, a második B, a harmadik C, a kilátó teteje H. 3 pont



(A térbeli viszonyok jó elképzelését tükröző ábráért az adatok feltüntetése nélkül is 3 pont adható.)

A hegy magasságát jelölje a $HT = m$ szakasz.

Az ATH, BTH és CTH derékszögű háromszögekből rendre:

$AT = m\sqrt{3}$. 1 pont

$BT = m$. 1 pont

$CT = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$. 1 pont

(AT; BT és CT ugyanazzal a paraméterrel való kifejezéséért 1–1 pont jár.)

Ha ABT szöget α-val jelöljük, akkor a $TBC\sphericalangle = 180° - \alpha$.

Az ABT és TBC háromszögekben a koszinusztételt az AT illetve a BT oldalakra felírva:

(1) $3m^2 = 500^2 + m^2 - 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos\alpha$. 2 pont

(2) $\dfrac{m^2}{3} = 500^2 + m^2 - 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos(180° - \alpha)$. 2 pont

(2) $\dfrac{m^2}{3} = 500^2 + m^2 + 2 \cdot 500 \cdot m \cdot \cos\alpha$. 2 pont

(Vagy pl. az ACT háromszögben a CT és az ABT-ben a BT oldalakra felírva a koszinusztételt: 3–3 pont.)

(A kétismeretlenes egyenletrendszer felírásáért összesen 6 pont.)

Az (1) és (2) egyenleteket összeadva:

$$m^2\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2(500^2 + m^2). \qquad \text{2 pont}$$

$$m = \sqrt{375\,000} \approx 612{,}4. \qquad \text{1 pont}$$

A hegy magassága körülbelül 612 méter. 1 pont

(A kapott végeredményhez még a megfigyelő magasságát kellene hozzáadnunk, de ettől a megoldás értékelésénél eltekinthetünk.)

Összesen: 16 pont