II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

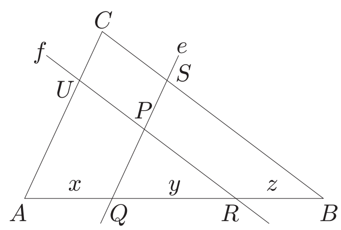
Első (iskolai) forduló

1. Hagyjunk el az $1, 2, 3, \ldots, 24$ számok közül néhányat úgy, hogy a megmaradtak szorzata a lehető legnagyobb köbszám legyen. Legalább hány számot kell elhagynunk?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha n 1-nél nagyobb egész, akkor

$$S = \left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) < 2.$$

3. Az ABC háromszög AC oldalával párhuzamos e egyenes és a BC oldalával párhuzamos f egyenes felezik a háromszög területét; e és f a P pontban metszik egymást; az e egyenes az AB oldalt a Q pontban, f az R pontban metszi. Határozzuk meg az ABC és a QPR háromszögek területének az arányát.



4. Állítsuk elő az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat a_n tagját csupán n felhasználásával, ha tudjuk, hogy $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = na_n + n^2 - n - 1$ (n pozitív egész).

5. Adott a k kör és annak egy AB átmérője. A k_1 és k_2 körök az AB által meghatározott egyik félkör belsejében helyezkednek el; k_1 a k kört a P pontban, AB-t a Q pontban érinti; ugyanígy k_2 a k kört az S, az AB-t pedig az R pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

Második forduló

1. Az $ABCD$ paralelogramma egyik szöge $30°$-os, $AB = a$, $BC = b$. A paralelogramma csúcsaiban síkjára merőleges, egyirányú félegyeneseket állítunk; az A-ban, illetve C-ben állított merőlegeseken úgy jelöljük ki az A', illetve C' pontokat, hogy $AA' = a$, $CC' = b$ teljesüljön. Az $A'C'$ egyenest tartalmazó sík a B-ben, illetve a D-ben állított merőleges félegyeneseket a B', illetve a D' pontokban metszi.

Mekkora annak a síklapokkal határolt konvex testnek a térfogata, amelynek csúcsai A, B, C, D, A', B', C', D'?

2. Legyenek n és a pozitív egészek, $a > 1$. Bizonyítsuk be, hogy $a^{5n} + a^n + 1$ nem lehet prímszám.

3. Egy háromszög oldalai: a, b, c, a velük szemközti szögek rendre α, β, γ; a köré írt kör sugara R. Mekkorák a háromszög szögei, ha a fenti adatok között az $\dfrac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha} = \dfrac{a+b+c}{9R}$ összefüggés áll fenn?

4. Az x, y, z nemnegatív valós számok kielégítik az $x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 3z = \dfrac{13}{4}$ egyenletet.

A) Mekkora az $x + y + z$ összeg maximuma?

B) Bizonyítsuk be, hogy $x + y + z \geq \dfrac{\sqrt{22}-3}{2}$.

Harmadik (döntő) forduló

1. Az ABC háromszög AB oldalát kívülről érintő hozzáírt kör az AB-t a C' pontban, a BC oldalt kívülről érintő hozzáírt kör BC-t az A' pontban és a CA oldalt kívülről érintő hozzáírt kör CA-t a B' pontban érinti. Az A, B, C csúcsokból induló magasságok felezőpontjai rendre X, Y, Z. Bizonyítsuk be, hogy az XA', YB' és a ZC' egyenesek átmennek a beírt kör középpontján.

2. Legyen $n > 2$ egész szám. Jelöljük a_n-nel a legnagyobb olyan n-jegyű pozitív egész számot, amely nem állítható elő sem két négyzetszám különbségeként, sem pedig két négyzetszám összegeként.

a) Adjuk meg a_n-et n függvényében.

b) Határozzuk meg azt a legkisebb n értéket, amelyre a_n jegyeinek a négyzetösszege négyzetszám.

3. Egy $ABCD$ szabályos tetraéder három lapja fehér, a negyedik, a D csúccsal szemközti lapja fekete, és a tetraéder az S síkon ezen a fekete lapján áll. A tetraédert gördíthetjük, azaz az S síkon egyik éle körül elforgatva az erre az élre illeszkedő másik lapja fekszik rá az S síkra.

Néhány gördítés után a tetraéder a kiindulási helyén áll. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az S síkon levő lapja nem lehet fehér.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Jelölje V egy téglatest térfogatának mérőszámát köbcentiméterben mérve, F pedig a felszínének mérőszámát négyzetcentiméterben mérve. Mennyi a lehető legkisebb térfogata egy olyan téglatestnek, amelyre $V = 10F$?

2. A H háromszöget daraboljuk fel a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ részháromszögekre. Jelölje ϱ, illetve a ϱ_i a H, illetve H_i háromszög beírt körének a sugarát. Mutassuk meg, hogy $\varrho \leq \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_n$.

3. Az ABC háromszög A csúcsából a B és C csúcsokból induló belső szögfelezőkre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek A_1 és A_2. Ugyanígy értelmezzük a B_1 és B_2, valamint C_1 és C_2 talppontokat is. Bizonyítsuk be, hogy az $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ összeg egyenlő a háromszög félkerületével.

4. Két zsákban piros és fehér golyók vannak. A kisebbikben 20 piros és 20 fehér, a nagyobbikban 1005 piros és 995 fehér golyó található. Tetszésünk szerint kiválasztjuk az egyik zsákot, ebből kihúzunk egy golyót, megnézzük és félretesszük, majd ismét tetszésünk szerint kiválasztunk a két zsák közül egyet, és kihúzunk belőle egy golyót. Milyen stratégiával érhetjük el, hogy a két kihúzott golyóból a lehető legnagyobb valószínűséggel legyen legalább az egyik piros?

5. Megadható-e 2002 különböző pozitív egész úgy, hogy közülük bármelyik két különbözőnek a különbsége abszolút értékben megegyezzék a legnagyobb közös osztójukkal?

Második (döntő) forduló

1. A sík egy H ponthalmazát nevezzük szépnek, ha H bármely háromelemű részhalmaza tengelyesen szimmetrikus. Igazoljuk az alábbi két állítást:

a) Egy szép halmaz nem feltétlenül tengelyesen szimmetrikus.

b) Egy 2003 elemű szép halmaz pontjai szükségképpen egy egyenesre esnek.

2. Egy adott 2003-szög minden csúcsát pirosra, kékre vagy zöldre színezzük úgy, hogy szomszédos csúcsoknak nem lehet azonos a színe. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

3. Legyen t rögzített pozitív egész, és jelölje $f_t(n)$ azoknak a k pozitív egészeknek a számát, amelyekre $1 \leq k \leq n$ és $\binom{k}{t}$ páratlan. (Ha $1 \leq k < t$, akkor $\binom{k}{t} = 0$.) Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy kettőhatvány, akkor

$$\frac{f_t(n)}{n} = \frac{1}{2^r},$$

ahol az r egész szám csak a t-től függ, az n-től nem.