

KEZDŐK
Első forduló
Mindhárom kategória

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| > p,$$

ahol p valós paramétert jelent!

(6 pont)

2. Határozza meg azokat a (pozitív) p prímszámokat, amelyekre $p^2 + 12p + 2$ is prímszám!

(6 pont)

3. Igazolja, hogy ha egy téglatest összes élének mérőszámát összeadjuk és ezt az összeget a felszínének a mérőszámával megszorozzuk, akkor a térfogata mérőszámának negyvenszeresénél nagyobb értéket kapunk! (8 pont)

4. Kössük össze az $ABCD$ négyzet A csúcsát a négyzet belsejében fekvő E ponttal, amelyre $AB = BE$. Jelölje a CE szakasz felezőmerőlegesének és az AE egyenesnek a metszéspontját P . Igazolja, hogy P illeszkedik a négyzet körülírt körére! (10 pont)

5. Igazolja a következő egyenlőtlenséget (ahol a nevező mindig 10-zel nő)!

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{2003} > \frac{2}{3} \quad (10 \text{ pont})$$

Második (döntő) forduló

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

1. Mennyi az alábbi kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok:

$$2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y.$$

2. Az ABC háromszög AB oldalával párhuzamos középvonalának egyenesét az A csúcsból kiinduló belső szögfelezője az M , a B csúcsból kiinduló belső szögfelezője az N pontban metszi. Ugyanígy kapjuk a másik két oldalból kiindulva a KL és PQ szakaszt. Mutassa meg, hogy:

$$2(MN + KL + PQ) = AB + AC + BC.$$

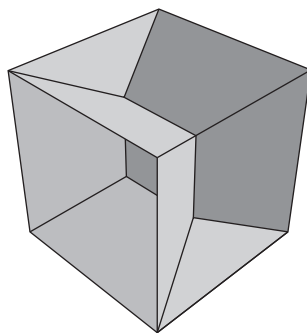
3. Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-mal!

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

1. Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-mal!

2. Adott egy $10 \times 10 \times 10$ -es kockarács. Három ember (A , B és C) a következő játékot játssza. Felváltva (A, B, C, A, B, C, \dots) elhelyeznek a kockarácsban egy-egy $1 \times 1 \times 10$ -es rudat, három egymásra merőleges irányból. (Mindegyikőjük csak a hozzá tartozó irányból helyezheti el a rúdját.) A rudakat teljesen be kell tolni, nem ütközhetnek egymással, legfeljebb érintkezhetnek. Hány (teljes) körből állhat a leghosszabb játék?

3. A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egy drótból készült kockát szappanos vízbe mártunk, egy, az alábbi ábrán szemléltetett szappanhártya alakzat keletkezik, mely egy négyzetből, négy egybevágó egyenlő szárú háromszögből és nyolc egybevágó szimmetrikus trapézból áll. Mutassa meg, hogy az így létrejött hártya felszíne – minden hártyaídomnak csak az egyik oldalát számítva – legfeljebb a tömörnek képzelt kocka felszínének $\frac{11}{12}$ -e. Javítható-e ez a becslés?



HALADÓK

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok a racionális számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyekre igaz, hogy $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)$ értéke nullától különböző egész szám?
2. Az ABC háromszög BC oldalának C -hez közelebbi harmadolópontja H , AC oldalának C -hez közelebbi negyedelőpontja pedig N . Az AH és BN szakasz a P pontban metszi egymást. Mekkora a $PHCN$ négyszög és az ABP háromszög területének aránya?
3. Négy számról, a -ról, b -ről, c -ről és d -ről tudjuk, hogy a belőlük képezhető hat darab kéttagú összeg közül három racionális, három pedig irracionális értékű.
 - A) Racionális szám-e az $a + b + c + d$ összeg?
 - B) Hány racionális szám lehet a négy szám között?
4. Az $ABCD$ trapéz AD szára merőleges az AB és CD alapra. A BC átmérőjű k kör az AD oldalt az E pontban érinti. Igazoljuk, hogy $BE + CE \leq \sqrt{2}(AB + CD)$.
5. Mely pozitív egész n értékekre igaz, hogy $2^n + 65$ értéke négyzetszám?

Második forduló

1. Melyik az a háromjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegyét letörölve, majd ezt a számjegyet a megmaradó két számjegy után írva olyan háromjegyű számot kapunk, melynek négyzetgyöke 9-cel kisebb az eredeti szám négyzetgyökénél.
2. Bármely derékszögű háromszögbe két olyan négyzet írható, amelyek csúcsai a háromszög kerületén vannak. Legfeljebb mekkora lehet a nagyobb és a kisebb négyzet területének aránya?
3. Legyen $g(x)$ egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi polinomnak nincs egész gyöke:

$$6(x^2 + 1)^2 + 5g(x) \cdot (x^2 + 1) - 21 \cdot g^2(x).$$

4. Egy $2n$ -szög mindegyik csúcsára a -1 vagy 1 számot írtuk rá. Egy lépésben bármelyik $(n + 1)$ darab csúcsra írt szám mindegyikének megváltoztathatjuk az előjelét. Milyen n érték esetén, mely kezdőhelyzetből indulva érhető el a megengedett lépés tetszőleges számú alkalmazásával, hogy mindegyik csúcshoz az 1 -es szám tartozzon?

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozzuk meg azokat az x_1, x_2, \dots, x_n pozitív számokat, amelyekre teljesülnek az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 3$$

összefüggések.

2. Az ABC háromszög tetszőleges belső pontjából merőlegeseket állítunk az oldalakra. A kapott három talppont által meghatározott háromszög köréért köre az eredeti háromszög oldalait újabb három pontban metszi: az AB oldalt P -ben, a BC oldalt Q -ban, az AC oldalt R -ben.

Bizonyítsuk be, hogy a P -n átmenő AB -re merőleges egyenes, a Q -n átmenő BC -re merőleges egyenes és az R ponton átmenő AC -re merőleges egyenes közös pontban metszi egymást.

3. Egy síkbeli terepen hat város között három egyenes út vezet. Az első A_1 -ből B_1 -be, a második A_2 -ből B_2 -be, a harmadik pedig A_3 -ből B_3 -ba. A_i -ből ($i = 1, 2, 3$) egyszerre indul el az f_i futár ($i = 1, 2, 3$) a B_i városba ($i = 1, 2, 3$), ahol mindegyik futár állandó sebességgel halad.

A közös indulás után a óra elteltével f_1 és f_2 találkozik, majd ezután b óra elteltével f_1 és f_3 találkozik, ismét a óra elteltével f_2 és f_3 halad el egymás mellett, végül újabb b óra elteltével mindhárman egyszerre érnek célba.

Milyen messze lehet $B_1 B_3$ -tól, ha $a > 0$, $b > 0$ és $A_1 A_2 = 1$ km?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Határozzuk meg azokat a p, q, r és n számokat, amelyekre $p^n + q^2 = r^2$ teljesül, ahol p, q, r pozitív prímszám, n pedig pozitív egész szám.

2. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogója 2 egység hosszú. Az átfogó mely P pontjára igaz, hogy a

a) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke minimális?

b) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke maximális?

3. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB < AD$.

Forgassuk el a húrnégyszöget az A csúcs körül úgy, hogy a kapott $AB'C'D'$ négyszög $B'C'$ oldalegyenesére illeszkedjen az eredeti négyszög C csúcsa.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $B'D'$ átló egyenese átmegy a D csúcson!

4. Egy táblára felírtuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendben 1-től $3n$ -ig. Jancsi a számok közül ezután n darabot letöröl (saját belátása szerint). Majd Juliska jön, és a megmaradt számok közül aláhúz n darabot. Bizonyítsuk be, hogy Juliska mindig el tudja érni azt, hogy az aláhúzott számok balról jobbra olvasva olyan sorozatot adjanak, amely páratlan számmal kezdődik és felváltva páros, ill. páratlan elemei vannak.

Második (döntő) forduló

1. A 2003-ad fokú $f(x) = a_{2003}x^{2003} + a_{2002}x^{2002} + \dots + a_1x + a_0$ polinomhoz található olyan pozitív egész p, q és r , amelyekre $p < q < r$ és $f(p) = q$, $f(q) = r$ és $f(r) = p$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ összes együtthatója nem lehet egész szám.

2. Az $ABCDE$ ötszögbe az oldalakat érintő kör írható. A B, C, D, E csúcsnál lévő szögek egyenlők. Az ötszög beírt köre a P pontban érinti az AE oldalt. Bizonyítsuk be, hogy az AD, PC és EB egyenesek egy ponton mennek át.

3. Egy országban, sík terepen hat város között három egyenes út vezet. Az első A_1 -ből B_1 -be, a második A_2 -ből B_2 -be, a harmadik pedig A_3 -ből B_3 -ba.

A_i -ből minden reggel 8 órakor elindul egy f_i futár, aki állandó sebességgel haladva pontosan délben érkezik B_i -be ($i = 1, 2, 3$).

Az út során f_1 és f_2 9 órakor találkozik, f_1 és f_3 10 órakor, f_2 és f_3 pedig 11 órakor.

Milyen hosszú a $B_1 B_3$ távolság, ha A_1 és A_2 1 km-re, A_2 és A_3 pedig 3 km-re fekszik egymástól?