I. megoldás. A Gausstól származó

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

azonosságot először az $a=n$, $c=n+1$, $b=d=1$ választással felírva

$$(n^2+1)\left((n+1)^2+1\right)=(n^2+n+1)^2+1, \tag{1}$$

másodszor az $a=n$, $c=n-1$, $b=d=1$ választással felírva;

$$(n^2+1)\left((n-1)^2+1\right)=(n^2-n+1)^2+1. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy valamilyen k-ra már találtunk olyan n-et, amire n^2+1 osztható 5^k-nal. (Például $k=1$-re $n=2$ vagy $n=3$; $k=2$-re $n=7$ megfelel.) Az $n^2+1=(n-2)(n+2)+5$ felírás alapján ez az n szám 5-tel osztva csak 2 vagy 3 maradékot adhat. Ha a 2 maradék, akkor $(n+1)^2+1$ osztható 5-tel, ha 3 a maradék, akkor $(n-1)^2+1$ osztható 5-tel. Így vagy (1) vagy (2) bal oldala – és ezzel együtt jobb oldala is – osztható 5^{k+1}-nel. Tehát $(k+1)$-hez is találtunk megfelelő számot, amivel a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás (vázlat). Belátjuk, hogy ha 5^k osztója (n^2+1)-nek, akkor $(n^5)^2+1$ osztható 5^{k+1}-nel. Ebből az I. megoldásban leírtakhoz hasonlóan már következik a feladat állítása. Legyen tehát $n^2+1=M\cdot 5^k$ (M egész), akkor

$$\begin{gathered}(n^5)^2+1=(n^2)^5+1=(M\cdot 5^k-1)^5+1=\\ 5^{k+1}(M^5\cdot 5^{4k-1}-M^4\cdot 5^{3k}+2M^3\cdot 5^{2k}-2M^2\cdot 5^k+M).\end{gathered} \tag{3}$$

A zárójelben $k\geq 1$ miatt egész szám áll, ami pontosan a mondott oszthatóságot jelenti.

Megjegyzés. A II. megoldásban igazolt állítás 5 helyett tetszőleges p páratlan prímszámmal elmondható. Ezt a Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek I. kötetének 246. példájával összevetve kapjuk a következő állítást:

Minden $4t+1$ alakú p prímszámhoz és minden k természetes számhoz van olyan n természetes szám, amire (n^2+1) osztható p-nek k-adik hatványával. Igazolható továbbá az is, hogy ha p $4t+3$ alakú prímszám, akkor (n^2+1) sohasem lehet osztható p-vel (és így p^k-nal sem).