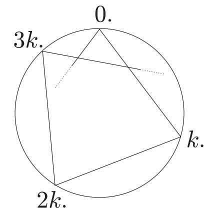
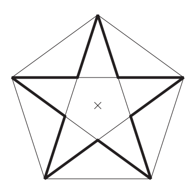
Októberi számunk **I. 59.**-es informatika feladatában n-ágú szabályos csillagokat kellett rajzolni, mégpedig az összes lehetségeset. Ezeket úgy kapjuk, hogy a szabályos n-szög ($n \geq 5$) egyik csúcspontjából indulva minden k-adikat összekötjük, amíg vissza nem érünk a kiindulási pontba (*1. ábra*). Csak azok az elfogadható megoldások, ahol valóban csillag keletkezik.



1. ábra

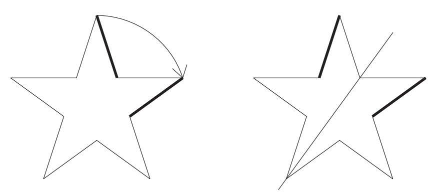
Definíció [1]. A *szabályos csillagsokszöget* a sík véges sok szakasza alkotja, ha minden végpontjuk két szakasz közös végpontja, és található hozzájuk olyan egybevágóság, amely a szakaszok egyikét egy tetszőlegesen előírt másikra fekteti, s amely a teljes alakzat helyét nem változtatja meg. A *szabályos sokszögvonal* is ilyen alakzat, de ezt nem nevezzük szabályos csillagsokszögnek. Egy szabályos sokszögnek a középponttól egyenlő (0-tól különböző) távolságra levő átlói szabályos csillagsokszöget alkotnak.

Tekintsük azt a szabályos csillagot, amelyet úgy kapunk, hogy a szabályos ötszögre alkalmazzuk a definíció második részét (*2a. ábra*).



2a. ábra

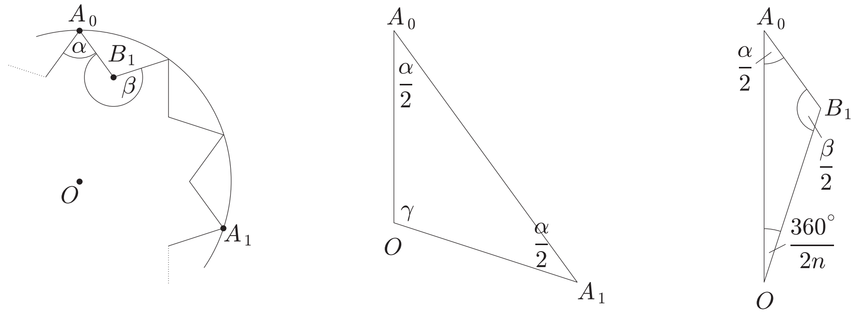
Erre a csillagötszögre valóban igaz, hogy bármely két szakaszához található egybevágóság: vagy forgatással, vagy tengelyes tükrözéssel egymásra fektethetők (*2b. ábra*). A csillagötszög elnevezés megtévesztő, a 2. ábrák csillagának nyilván tíz oldala van.



2b. ábra

Milyen további tulajdonságai vannak ezeknek az alakzatoknak? A szabályos csillag-n-szögnek $2n$ oldala van, a szimmetriák miatt az oldalak egyenlő hosszúak; szögei (amelyekből ugyancsak $2n$ van) közül minden második, n darab egyenlő nagyságú (ez legyen α), a további, az előzőekkel szomszédos n darab szög ugyancsak egyenlő. A sokszögek szögösszegéből könnyen adódik, hogy

$$\alpha + \beta = 360^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$



3a. ábra

Legyen ugyanis a megfelelő szabályos sokszög kiindulási csúcsa A_0, a k-adik csúcs A_1, a csillagsokszög A_0-lal (az óramutató járása szerint) szomszédos csúcsa pedig B_1. Az A_0A_1O háromszögben (*3a. ábra*) $\gamma = \frac{k}{n} \cdot 360°$ (hiszen a szabályos n-szög első és k-adik csúcsáról van szó), tehát

$$\alpha = 180° - \gamma = \left(1 - \frac{2k}{n}\right) \cdot 180°. \tag{1}$$

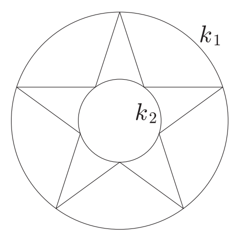
Az A_0B_1O háromszögben:

$$A_0OB_1\sphericalangle = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n} = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \tag{2}$$

amiből látszik, hogy valóban $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{180°}{n}$, tehát $\alpha + \beta = 360° - \frac{360°}{n}$, amely összeg k-tól független. (1)-ből és (2)-ből kiszámítható β értéke is:

$$\beta = 180° + (k-1)\frac{360°}{n}.$$

A forgásszimmetria miatt a csillagsokszög másodszomszédos csúcsai egy-egy körön helyezkednek el: a k_1 és egy, az előzővel koncentrikus k_2 körön (*3b. ábra*).

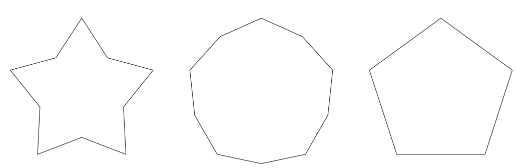


3b. ábra

Úgy tűnik, a csillagsokszög minden második szöge konkáv. Igaz-e ez? Ha a belső, k_2 kör sugarát növeljük (vagy csökkentjük), egy olyan alakzatot kapunk, amely megfelel a definíciónak, tehát ugyancsak nevezhetjük szabályos csillagsokszögnek. Erre általában nem igaz, hogy oldalai a szabályos sokszög átlóira illeszkednek. A „belső” pontok mozgatását egészen addig folytathatjuk, amíg már nem lesznek konkáv szögeink, de még nem érik el a k_1 kört (ekkor szabályos $2n$-szög keletkezik). Ezt megtehetjük, hiszen

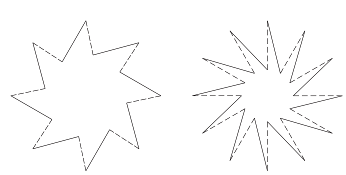
$$\alpha + \beta = 360° - \frac{360°}{n} < 360° \qquad (\textit{4a. ábra}).$$

A definíció szerint ez is szabályos csillagsokszög, de ha a szabályos sokszöget nem tekintjük annak, előírhatjuk, hogy csillagsokszögünk minden második szöge legyen konkáv. Van egy átmeneti állapot, amikor $\beta = 180°$, ekkor a csillagsokszög n oldalú szabályos sokszöggé alakul át.



4a. ábra

Ha a belső, k_2 körre eső csúcsokat elforgatjuk a középpont körül, a forgásszimmetria továbbra is teljesül minden második oldalra, de a szomszédos oldalakra a tükörszimmetria már nem, tehát a keletkezett „körfűrész” nem szabályos csillagsokszög (*4b. ábra*).



4b. ábra

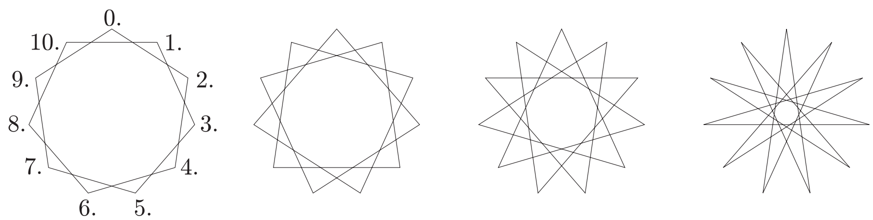
Nézzük meg most már, hogy melyek az informatika feladat jó megoldásai, ha a szabályos n-szög k-szomszédos csúcsait kötjük össze. Így egy folytonos, zárt poligont (töröttvonalat) kapunk, amelynek bizonyos szakaszai metszik egymást, így ezt *hurkolt poligonnak* [1] nevezzük (csak ekkor beszélhetünk a feladat megoldásának tekintett szabályos csillagról).

Ha $k > \frac{n}{2}$, akkor ugyanazt az ábrát kapjuk, mint ha egy csúcsból indulva minden csúcsot az $(n-k)$-adik szomszédjával kötjük össze. Páros n esetén $k = \frac{n}{2}$ sem ad megoldást, ekkor ugyanis egyetlen szakaszt kapunk, a körülírt kör átmérőjét. Így feltehető, hogy: $2 \le k < \frac{n}{2}$.

Nézzük először az $n = 11$ esetet (ez szerepelt a kitűzésben példaként). $2 \le k < 5{,}5$ miatt a lehetséges esetek: $k = 2, 3, 4, 5$. Ha $k = 2$, a csúcsok összekötésének sorrendje:

$$0.,\quad 2.,\quad 4.,\quad 6.,\quad 8.,\quad 10.,\quad 1.,\quad 3.,\quad 5.,\quad 7.,\quad 9.,\quad 0.$$

(A 6. lépésnél nincs értelme 12. csúcsot írni, hiszen ez megegyezik az elsővel.) 11 prím, így a 11. lépésben záródik be a sokszög. A lehetséges eseteket az *5. ábra* mutatja.

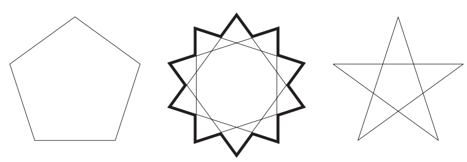


$k=2$ $k=3$ $k=4$ $k=5$

5. ábra

Hasonló igaz, ha az n prímszám. Ilyenkor a lehetséges értékek: $k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ (ahol $[x]$ jelenti az x szám egész részét, n páratlan prím, így $\frac{n}{2}$ nem egész), a megoldások száma $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

Ha $n = 10$, akkor $2 \le k < 5$ miatt a lehetséges értékek: $k = 2, 3, 4$, ezeket mutatja rendre a *6. ábra*. A $k = 2$ esetben már az 5. lépésben elérjük a kiindulási pontot, anélkül, hogy a keletkezett szakaszok metszenék egymást, szabályos ötszöget kaptunk. Általánosan elmondhatjuk, hogy ha $k \mid n$, akkor szabályos $\frac{n}{k}$-szöget kapunk, amit a feladat nem tekint megoldásnak.



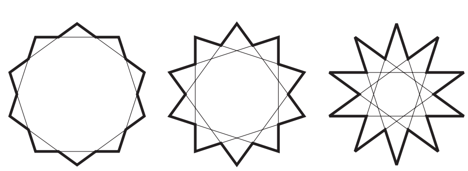
$k=2$ $k=3$ $k=4$

6. ábra

A $k = 4$ esetben szabályos ötágú csillagot kapunk, ami megoldás lehetne, de a feladat szövege nem ide sorolja, $n = 10$ esetben tízágú csillagokat kell rajzolnunk. Általánosan: ha k-nak és n-nek van közös osztója, azaz ha nem relatív prímek, akkor egy $\frac{n}{(n;k)}$-ágú szabályos csillagot kapunk (ahol $(n;k)$ az n és a k legnagyobb közös osztója), ami a feladatnak nem megoldása.

A $k = 3$ esetben valóban szabályos tízágú csillagot kapunk. Általánosan: ha k és n relatív prímek ($k \ge 2$), akkor be tudjuk járni a csúcsokat anélkül, hogy az n-edik lépés előtt visszaérnénk a kiindulási pontba, a poligon hurkolt lesz és így n-ágú csillagot kapunk.

Végül $n = 10$-re csak egy „jó” megoldást kaptunk, holott ha az informatika feladatot úgy értelmezzük, hogy összekötjük a középponttól egyenlő távolságra levő átlókat, három különböző megoldást is kapnánk (hiszen ennyi lehetséges k van, *7. ábra*).



7. ábra

Van-e a feladatnak mindig megoldása, ha n nem prím? Ha $n = 6$, k értéke csak 2 lehet, ekkor viszont szabályos háromszöget kapunk, ami nem megoldás.

Ha n legalább 3, akkor van nála kisebb hozzá relatív prím, például $n-1$. Mi viszont a k-nak azokkal az értékeivel dolgozunk, amelyekre k kisebb az n felénél. Láttuk, hogy ha $n = 6$, akkor azért nincs a feladatnak megoldása, mert a 6 felénél, a 3-nál kisebb számok között csak az 1 relatív prím a 6-hoz. Vannak-e még ilyen számok? Az alábbiakban megmutatjuk, hogy nincsenek.

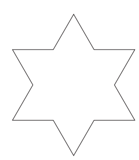
A következő összetett szám: $n = 8$, ehhez a felénél kisebb relatív prím a 3. $n = 9$ esetén megoldás a 2 (de a 4 is), $n = 10$ esetén megoldás a 3. Képezzük most a következő szorzatot:

$$s_r := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r,$$

ahol p_i az i-edik prímszám. $s_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, ami nyilván nagyobb 5-nél (a legnagyobb tényezőnél), ezért minden n-re, ahol $5 < n < 30$, létezik $k \in \{2; 3; 5\}$, hogy $(k; n) = 1$. Ellenkező esetben ugyanis az n prímtényezős felbontásában szerepelnie kellene az első három prímnek, ám ekkor $n \geq 30$. Hasonlóan kapjuk az általánosítást: Ha n kisebb az előző r prím szorzatánál, akkor a $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ halmaz valamelyik eleme és az n relatív prímek. Így ha $p_r < n < s_r$, akkor van olyan $k \leq p$, hogy $(k; n) = 1$. Az $[5; 30]$ intervallumban már megvizsgáltuk a 11-nél kisebb számokat, az ennél nagyobbaknál viszont az előbbiek miatt biztosan van $\frac{n}{2}$-nél kisebb n-hez relatív prím, hiszen az előző halmaz összes prím eleme kisebb 11 felénél.

Az intervallum alsó határa az r-edik prímszám, a felső határa az első r prím szorzata, ami sokkal gyorsabban nő, mint az alsó határ, így az intervallumok hossza gyorsan nő. (Pl. ha $r = 4$, akkor ez a $[7; 210]$ intervallum; ha $r = 5$, akkor a $[11; 2310]$.) A felső határt a második lépéstől kezdve mindig 2-nél nagyobb prímmel szorozzuk, így minden n-re találunk egy (vagy több) olyan intervallumot, amelynek tagja $\frac{n}{2}$ is és n is, így az intervallumnak megfelelő prímhalmazban találunk $\frac{n}{2}$-nél kisebb n-hez relatív prímet. Tehát minden 6-nál nagyobb n esetén van informatikai feladatunknak legalább egy megoldása. A megoldások száma általában nyilván $\frac{\varphi(n) - 2}{2}$, ahol $\varphi(n)$ jelöli az n-nél kisebb n-hez relatív számok számát. (Ehhez gondoljuk meg, hogy k és n pontosan akkor relatív prímek, ha $n - k$ és n is azok, másfelől ha $k = 1$ vagy $n - 1$, akkor nem kapunk megoldást.) A fenti becslések épp azt eredményezik, hogy $\varphi(n) > 2$, ha $n > 6$.

Mindez persze nem jelenti azt, hogy hatágú csillag nem létezik, hiszen ismerünk is ilyet (*8. ábra*). Ezt valóban a szabályos hatszög középpontjától egyenlő távolságra lévő átlói alkotják, mégpedig az egyetlen lehetséges módon. Ha minden lehetséges csillagsokszöget szeretnénk megkapni, programozási feladatunkon úgy kellene módosítani, hogy ha visszaérünk a kiindulási pontba anélkül, hogy n-ágú csillagot kaptunk volna, az eljárást megismételjük a második pontból indulva, majd a harmadikból, és így tovább, amíg még találunk „szabad” pontokat.



8. ábra

Eddigi okfejtésünk talán bonyolultnak tűnhet, de egy egyszerű programmal meg lehet keresni egy adott számhoz a felénél kisebb, vele relatív prímeket. Ezekre pedig már megalkothatjuk „jó” csillagainkat.

Hivatkozás

[1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* Tankönykiadó (Budapest, 1991).