**1.** *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

$$a)\quad \sqrt{5x-6}=2+\sqrt{x-2}\qquad b)\quad \sqrt{5x-5}=2+\sqrt{x-2};$$

$$c)\quad \sqrt{5x-4}=2+\sqrt{x-2};\qquad d)\quad \sqrt{5x-14}=2+\sqrt{x-2}.$$

**Megoldás.** Dolgozzunk a $\sqrt{5x-a}=2+\sqrt{x-2}$ egyenlettel. Az egyenlet sokféle módon oldható meg. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát (ekkor következmény egyenletre jutunk), majd rendezzük az egyenletet. Ekkor

$$4x-a-2=4\sqrt{x-2}.$$

Legyen $\sqrt{x-2}=y\geq 0$, így $x=y^2+2$ és az

$$y^2-y+\frac{6-a}{4}=0$$

egyenlethez jutunk.

*a*) Ha $a=6$, akkor $y^2-y=0$, $y_1=0$, $y_2=1$, így $x_1=2$, $x_2=3$ és ezek valóban megoldások.

*b*) Ha $a=5$, akkor $y^2-y+\frac{1}{4}=0$, $y_3=\frac{1}{2}$, így $x_3=\frac{9}{4}$, és ez valóban megoldás.

*c*) Nincs megoldása az egyenletnek.

*d*) A megoldás $x_4=6$.

**2.** *A konvex $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, a $BD$ átló felezi az $AC$ átlót. Az $ABC\sphericalangle=120°$, $AC=4\sqrt{3}$, $BD=8$. Számítsuk ki a négyszög területét, oldalait és szögeit.*

**Megoldás.** A négyszög területe $T=\frac{4\sqrt{3}\cdot 8}{2}=16\sqrt{3}$.

Jelölje $F$ az átlók metszéspontját. Ekkor az $ABF$ derékszögű háromszög $B$ csúcsnál lévő szöge $60°$, s mivel $AF=2\sqrt{3}$, így $BF=2$, $AB=BC=4$, $BAF\sphericalangle=BCF\sphericalangle=30°$.

Mivel $DF=BD-BF=8-2=6$, azért az $AFD$ derékszögű háromszögben $AD^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2=48$, $AD=CD=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$. Így $AD=DC=AC$, tehát az $ACD$ egyenlő oldalú háromszög. A négyszög szögei: $120°$, $90°$, $60°$, $90°$.

**3.** *Igazoljuk, hogy ha $-1<a<0$ vagy $0<a<1$, akkor $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}\geq 4$.*

**Megoldás.** Elegendő igazolni, hogy

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}-4\geq 0,\quad \text{ha}\quad -1<a<1\quad \text{és}\quad a\neq 0.$$

Azonos átalakításokkal

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{1-a^2}-4\equiv\frac{1-a^2+a^2-4a^2(1-a^2)}{a^2(1-a^2)}\equiv\frac{\left(2a^2-1\right)^2}{a^2(1-a^2)}.$$

$\frac{\left(2a^2-1\right)^2}{a^2(1-a^2)}\geq 0$, hiszen $\left(2a^2-1\right)^2\geq 0$ és $a^2(1-a^2)>0$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a^2=\frac{1}{2}$, azaz ha $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**4.** *Az $x^2+y^2=9$ és az $(x-4)^2+(y-8)^2=1$ egyenletű körök középpontját összekötő szakasz mely pontjából húzható közös érintő a két körhöz? Írjuk fel az érintőegyenesek egyenletét.*

**Megoldás.** Készítsünk ábrát. Erről leolvasható, hogy az $x=3$ egyenletű egyenes közös érintő. Ez a középpontokat összekötő $y=2x$ egyenletű egyenest a $P_0(3;6)$ pontban metszi. (A $P_0$ pont a $C_1(0;0)$ és $C_2(4;8)$ pontokat összekötő szakasznak az a pontja, amelyre $\frac{C_1P_0}{C_2P_0}=3$, azaz $\overrightarrow{OP_0}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OC_2}=\frac{3}{4}(4;8)=(3;6)$.) A másik közös érintő egyenletét a szerkesztés módszerével, vagy paraméteresen, vagy trigonometria alkalmazásával is megkaphatjuk.

A másik érintőnek van meredeksége, egyenletét $y-6=m(x-3)$ alakban keressük. A közös érintő a körök középpontjától sugárnyi távolságban halad, tehát az origó és az $mx-y+6-3m=0$ egyenes távolsága 3, azaz

$$3=\frac{|6-3m|}{\sqrt{m^2+1}},\quad \text{ahonnan}\quad m=\frac{3}{4}.$$

A másik érintő egyenlete: $3x-4y+15=0$.

**5.** *Határozzuk meg $\frac{y}{x}$ értékét, ha*

$$a)\quad \lg^2 y+\lg^2 x-2\lg y\cdot\lg x-\lg y+\lg x=2;\qquad b)\quad \cos\frac{y+2x}{2x}=\cos\frac{y-2x}{2x}.$$

**Megoldás.** $a$) Azonos átalakításokkal $(\lg y - \lg x)^2 - (\lg y - \lg x) - 2 = 0$, ahonnan $\lg y - \lg x = 2$ vagy $\lg y - \lg x = -1$, tehát $\lg \frac{y}{x} = 2$, $\frac{y}{x} = 100$ vagy $\lg \frac{y}{x} = -1$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{10}$.

$b$) $\cos \frac{y+2x}{2x} = \cos \frac{y-2x}{2x}$ pontosan akkor igaz, ha $\frac{y}{2x} + 1 = \frac{y}{2x} - 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vagy $\frac{y}{2x} + 1 = 1 - \frac{y}{2x} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, azaz $2 = 2k\pi$, $k = \frac{1}{\pi}$, ami sohasem teljesül, hiszen $\frac{1}{\pi}$ nem egész szám vagy $\frac{y}{x} = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

**6.** *Határozzuk meg azoknak a rendezett $(x; y)$ számpároknak a halmazát, amelyek kielégítik a következő egyenletrendszert:*

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1, \qquad |x - 2| + y = 4.$$

**Megoldás.** A $\sqrt{a^2} = |a|$ azonosság alkalmazásával

$$|x - 2| + |y - 3| = 1,$$

$$|x - 2| + y = 4.$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat. Ekkor $|y - 3| - y = -3$, $|y - 3| = y - 3$, tehát csak olyan $(x; y)$ számpár lehet megoldás, amelyre $y \geq 3$. Mivel $y = 4 - |x - 2|$, azért ha $x \geq 2$, akkor $y = 6 - x$ és $x \leq 3$, ha $x < 2$, akkor $y = x + 2$ és $x \geq 1$. Legyen $x = t$, így $1 \leq t \leq 3$. Az egyenletrendszert az $x = t$, $y = t + 2$, $1 \leq t < 2$ és az $x = t$, $y = 6 - t$, $2 \leq t \leq 3$ számpárok elégítik ki. (A megoldáshalmazhoz tartozó $P(x; y)$ pontok az $y = 4 - |x - 2|$ egyenletű grafikonnak azon pontjai, amelyekre $y \geq 3$.)

**7.** *Egy szabályos háromszög csúcspontjain át egymással párhuzamos egyeneseket húzunk, közülük a középsőnek a két szélsőtől való távolsága* 1, *illetve* 4. *Számítsuk ki a szabályos háromszög oldalait.*

**Megoldás.** Legyen a középső egyenes $b$, a tőle 1, illetve 4 távolságra haladó párhuzamos $a$, illetve $c$. A szabályos $ABC$ háromszög $A$ csúcsa essen az $a$, $B$ csúcsa a $b$, $C$ csúcsa a $c$ egyenesre. Természetesen végtelen sok ilyen háromszög létezik, s ezek egybevágók. Helyezzük el az $A$ pontot az $a$ egyenesen, a $B$-t a $b$ egyenesen úgy, hogy az $ABC$ háromszög körüljárási iránya pozitív legyen. Legyen az $A$ pont vetülete a $b$ egyenesen $A_1$, a $c$ egyenesen $A_2$, a $B$ pont vetülete a $c$ egyenesen $B_1$. Ekkor $BA_1 = B_1A_2 = B_1C + CA_2$. Ha a háromszög oldala $a$, akkor $BA_1 = \sqrt{a^2 - 1}$, $B_1C = \sqrt{a^2 - 16}$, $CA_2 = \sqrt{a^2 - 25}$, így

$$\sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{a^2 - 16} + \sqrt{a^2 - 25}.$$

Négyzetre emeléssel, majd rendezéssel:

$$a^2 - 1 = 2a^2 - 41 + 2\sqrt{(a^2 - 16)(a^2 - 25)},$$

$$40 - a^2 = 2\sqrt{a^4 - 41a^2 + 400},$$

$$40^2 - 80a^2 + a^4 = 4a^4 - 164a^2 + 40^2,$$

ahonnan $a^2 = 28$, $a = 2\sqrt{7}$. A szabályos háromszög oldalának hossza $2\sqrt{7}$.

**8.** $a$) *Igazoljuk az $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ egyenlőtlenséget, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

$b$) *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett*

$$f(x) = (x + a)(x + b) + (x + b)(x + c) + (x + c)(x + a)$$

*hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek $a$, $b$ és $c$ bármely valós értéke esetén van zérushelye.*

$c$) *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett*

$$g(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

*hozzárendelési szabállyal megadott függvénynek nincs zérushelye, ha $a$, $b$ és $c$ egy háromszög három oldala.*

**Megoldás.** $a$) Világos, hogy $(a - b)^2 \geq 0$ minden $a, b \in \mathbb{R}$ számra. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b$. Így $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ és $c^2 + a^2 \geq 2ca$, tehát

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca,$$

így valóban

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

$b$) Azonos átalakításokkal $f(x) = 3x^2 + 2(a + b + c)x + ab + bc + ca$. Az $f$ függvénynek pontosan akkor van $a$, $b$ és $c$ bármely valós értéke esetén zérushelye, ha az $f(x) = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

A diszkrimináns:

$$D = 4(a+b+c)^2 - 4 \cdot 3(ab+bc+ca),$$

$$D = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

így valóban $D \geq 0$.

*c*) A $g(x)=0$ egyenlet $D_1$ diszkriminánsa:

$$D_1 = (b^2+c^2-a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc) =$$
$$= \big((b+c)^2-a^2\big)\big((b-c)^2-a^2\big) = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a).$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint az első három tényező pozitív, a negyedik negatív, így $D_1<0$, a $g$ függvénynek valóban nincs zérushelye. (A koszinusztétel alkalmazásával is dolgozhatunk.)