Scharnitzky Viktor matematikus, főiskolai tanár emlékére

Rábai Imre

1. Oldjuk meg a rendezett valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

$$a)\quad \begin{aligned}(x+1)y&=0,\\ (x^2-1)(y+1)&=0;\end{aligned}\qquad\qquad b)\quad \begin{aligned}x^2+xy&=2,\\ y^2-2xy&=5.\end{aligned}$$

2. Legyen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-2x+4$. Igazoljuk az $f(k+2)=f(k)+8k+4$ azonosságot.

3. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletek egyik gyöke a másik gyökük kétszerese legyen:

$$1)\quad x^2+3ax+2a^2=0;\qquad\qquad 2)\quad x^2-3ax+2a^2-1=0;$$

$$3)\quad x^2-3(a+1)x+2a^2+6a=0;\qquad\qquad 4)\quad x^2+ax-2a-4=0.$$

4. A koordináta-rendszerben adott két párhuzamos egyenes, e és f, valamint köztük a k kör. A k kört az e egyenesre tükrözve az $x^2+y^2-4x-12y+39=0$ egyenletű k_1 kört, az f egyenesre tükrözve pedig az $x^2+y^2-16x+12y+99=0$ egyenletű k_2 kört kapjuk. Határozzuk meg azt a pontot, amelyre k_1 és k_2 középpontosan szimmetrikus, illetve annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre a k_1 és k_2 tengelyesen szimmetrikus. Számítsuk ki az e és f egyenesek távolságát.

5. Egy négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ rombusz. A gúla E csúcsának az alapsíkra eső merőleges vetülete a rombusz átlóinak F metszéspontja. Számítsuk ki a gúla térfogatát és felszínét, ha a rombusz átlói $AC=10$ cm, $BD=18$ cm és a gúla magassága $EF=12$ cm.

6. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$a)\quad \frac{\log_3 x}{\left(\log_{\frac{1}{3}} x+3\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x-1\right)}<0;\qquad b)\quad \frac{\log^2_{\frac{1}{3}} x+2\log_{\frac{1}{3}} x-3}{\log_3 x}\geq 0.$$

7. *a)* Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat pontosan akkor számtani sorozat, ha minden 1-nél nagyobb természetes számra $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$.

b) Adott a d differenciájú (a_n) számtani sorozat. A sorozathoz találhatók olyan p és q valós számok, hogy minden 1-nél nagyobb n természetes szám esetén $a_{n+1}=2pa_n-qa_{n-1}$. Határozzuk meg p és q lehetséges értékeit, ha (a_n) (i) nem állandó sorozat; (ii) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1\neq 0$; (iii) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1=0$.

8. Egy kör kerületének P pontjából megrajzoltuk a $PA=12$ cm és $PB=16$ cm hosszúságú húrokat. A PA húr F felezőpontjának a PB egyenestől való távolsága $2\sqrt{3}$. Számítsuk ki a kör sugarát.