

Idén Nyíregyháza adott otthont a tanárképző főiskolások Péter Rózsáról elnevezett matematikaversenyének 2003. április 23. és 25. között. Budapest, Eger, Nyíregyháza, Pécs, Szeged és Szombathely diákjai indultak. A szokásos 5–5 fő helyett Budapest idén csak 4 versenyzőt küldött. A dolgozatokat április 24-én délelőtt írták. A feladatokat a főiskolák oktatóinak javaslatai alapján a verseny elnöke, *Urbán János* állította össze. Minden főiskola javaslataiból választott egyet-egyet, és a saját feladatával megtoldva állt össze az alábbi hét feladat.

- Hányféleképpen lehet az ötös lottón a 90 szám közül 5-öt megjelölni úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak?
- Az  $a$  valós paraméter mely értékeire van egyetlen olyan  $(x, y)$  valós számpár, amely kielégíti az

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 \leq 0$$

egyenlőtlenséget és az

$$x - y + a = 0$$

egyenletet is?

**3.** Nevezzük *szabályos tér  $n$ -szögnek* a térbeli  $n$ -szöget, ha minden oldala egyenlő hosszúságú és a szomszédos oldalak ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Milyen határok között változhat egy szabályos tér 4-szög egy szöge?

- Igazoljuk, hogy ha  $a, b, c$  pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

- Határozza meg az összes olyan  $(a, b)$  valós számpárt, amelyekre az

$$x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + 81 = 0$$

egyenletnek négy pozitív valós gyöke van!

- Legyen  $(a_n)$  a következő sorozat:

$$a_1 = c \quad (c \in \mathbf{R}), \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{1 + a_{n-1}}, & \text{ha } a_{n-1} \neq -1, \\ -1, & \text{ha } a_{n-1} = -1, \end{cases}$$

ha  $n > 1$  egész. Milyen  $c$  esetén konvergens a sorozat, és mennyi a határértéke?

**7.** Adott a síkon 400 pont, amelyek közül semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy van olyan 100 darab, páronként diszjunkt négyszög, amelyeknek éppen az adott pontok a csúcsai. (Diszjunktak nevezünk két négyszöget, ha – mint zárt négyszöglapoknak – nincs közös pontjuk.)

A díjkiosztó ünnepségre másnap, április 25-én került sor. A 29 résztvevő diák között egy első, két második, négy harmadik díjat osztott ki a versenybizottság. Nyolc diák kapott dicséretet. A rendezők vendégszeretettelükkel nagyon kellemessé tették az otthont. Jövőre Eger lesz a verseny helyszíne.