A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Legyen A az $S=\{1,2,\ldots,1\,000\,000\}$ halmaz egy 101 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy találhatók olyan $t_1,t_2,\ldots,t_{100}$ számok az S halmazban, amelyekre az*

$$A_j=\{x+t_j \mid x\in A\}\quad (j=1,2,\ldots,100)$$

halmazok páronként diszjunktak.

Nagy Zoltán Lóránt megoldása. Legyenek az A halmaz elemei $x_1,x_2,\ldots,x_{101}$. Az S-beli $t_1,t_2,\ldots,t_{100}$ számok pontosan akkor megfelelők, ha akkor és csak akkor teljesül az

$$(*)\qquad x_j+t_p=x_k+t_q$$

egyenlőség, ha $p=q$ és $j=k$ ($1\le j,k\le 101$, és $1\le p,q\le 100$).

Teljes indukcióval megadunk egy megfelelő t_n sorozatot. Válasszuk t_1-et tetszőlegesen S-ből. Legyen $1\le n\le 100$ és tegyük fel, hogy az S-beli $t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}$ számokat már megadtuk a $(*)$ feltétel szerint. Megmutatjuk, hogy t_n is kiválasztható.

$t_n\in S$ pontosan akkor megfelelő, ha

a) $t_n\ne t_i$ $(1\le i<n)$,

b) $t_n\ne x_j-x_k+t_m$ $(j\ne k,\ 1\le m<n)$.

Az *a)* feltétel a lehetséges értékek közül $(n-1)$-et, a *b)* pedig legfeljebb $101\cdot 100\cdot(n-1)$-et zár ki. Ez összesen legfeljebb

$$(n-1)(101\cdot 100+1)\le 99(101\cdot 100+1)=(100-1)(100^2+100+1)=100^3-1.$$

Mivel S-nek 100^3 eleme van, azért marad nem kizárt érték t_n számára, a bizonyítást befejeztük.

2. *Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (a,b) párt, amire*

$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$

pozitív egész.

Pach Péter Pál megoldása. Azokat az $(a;b)$ pozitív egész számpárokat kell megkeresnünk, amelyekre $n = \dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ szintén pozitív egész szám.

Vizsgáljuk meg először a $b=1$ esetet. Ekkor a nevező $2a$, a tört értéke $\dfrac{a^2}{2a} = \dfrac{a}{2}$. Ez pontosan akkor egész, ha a páros. Így tetszőleges j pozitív egészre $(2j;1)$ megoldás és minden más esetben $b>1$.

Az $n = \dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ egyenlőségből beszorzás és rendezés után egy a-ban másodfokú egyenletet kapunk: $a^2 - 2nb^2a + nb^3 - n = 0$. Ha fennáll az eredeti egyenlőség, akkor ennek is teljesülnie kell. A másodfokú egyenlet megoldóképletéből a-ra kapjuk, hogy $a = nb^2 \pm \sqrt{n^2b^4-nb^3+n}$. Mivel a, b, n pozitív egészek, az egyenlet diszkriminánsának, $(n^2b^4-nb^3+n)$-nek négyzetszámnak kell lennie. Megmutatjuk, hogy a diszkrimináns egy bizonyos értelemben „szomszédos" számok közé szorítható, pontosabban

$$\left(nb^2 - \frac{b+1}{2}\right)^2 < n^2b^4 - nb^3 + n < \left(nb^2 - \frac{b-1}{2}\right)^2. \tag{1}$$

A négyzetre emeléseket elvégezve rendezés után azt kell igazolnunk, hogy

$$-nb^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 < n < nb^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2.$$

A felső becslés nyilvánvaló, hiszen $n \ge 1$ és $b > 1$ miatt $\left(\dfrac{b-1}{2}\right)^2 > 0$. Az alsó becslést rendezzük át:

$$\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 < n(b^2+1).$$

Mivel $1<b$, azért $\left(\dfrac{b+1}{2}\right)^2 < \left(\dfrac{b+b}{2}\right)^2 = b^2$, ami $n \ge 1$ miatt kisebb, mint a jobb oldal. Ezzel az (1) egyenlőtlenségeket igazoltuk.

Látható, hogy ha b páratlan, akkor (1)-ben a diszkrimináns két szomszédos egész szám négyzete közé esik, tehát nem lehet négyzetszám. Így b szükségképpen páros szám, legyen $b=2k$.

Vegyük észre, hogy (1)-ből nyilvánvalóan következnek az alábbi, gyengébb becslések is:

$$\left(nb^2 - \left(\frac{b}{2}+1\right)\right)^2 < n^2b^4 - nb^3 + n < \left(nb^2 - \left(\frac{b}{2}-1\right)\right)^2. \tag{2}$$

[(1) bal oldalát csökkentettük, a jobb oldalát pedig növeltük.]

Ha b páros, akkor a (2)-ben kapott korlátok másodszomszédos négyzetszámok, közéjük egyetlen négyzetszám esik, így ebben az esetben a diszkrimináns, $n^2b^4 - nb^3 + n = \left(nb^2 - \dfrac{b}{2}\right)^2$.

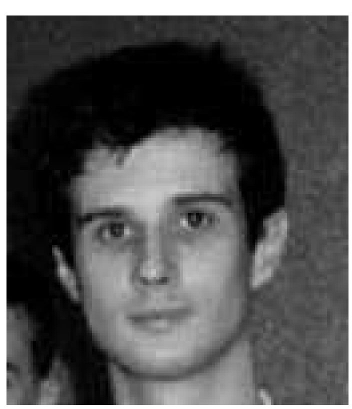
Innen azt kapjuk, hogy $n = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = k^2$ és a diszkrimináns, $D = (4k^4-k)^2$. Ekkor $a = nb^2 \pm \sqrt{D} = 4k^4 \pm (4k^4-k)$, azaz vagy $a = 8k^4-k$, vagy pedig $a=k$.

A feladat megoldásai tehát a $(2k;1)$, $(8k^4-k;2k)$, $(k;2k)$ alakú számpárok, ahol k pozitív egész.

Az utóbbi két számpárt ellenőrizve kapjuk, hogy megoldásai a feladatnak.

3. *Adott egy konvex hatszög, amelyben bármely két szemközti oldalra teljesül a következő tulajdonság: az oldalak középpontjai közötti távolság* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$*-szerese a hosszuk összegének. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamennyi szöge egyenlő.*

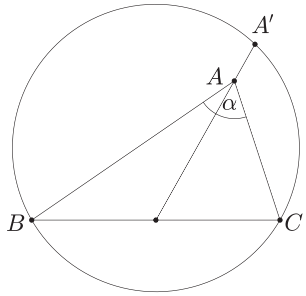
(Az $ABCDEF$ konvex hatszögben három szemközti oldalpár van: AB és DE, BC és EF, CD és FA.)



Csóka Endre megoldása. Először igazoljuk az alábbi segédtételt:

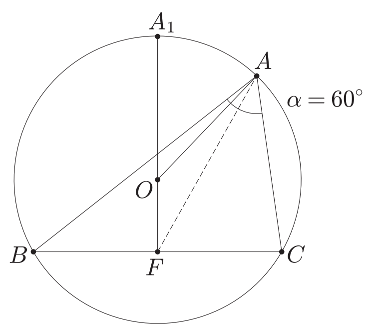
Legyen egy ABC háromszög A csúcsánál α szög, az A-ból induló súlyvonal s, az A-val szemközti oldal pedig a. Ha $\alpha \geq 60^\circ$, akkor $s \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$ és egyenlőség csak szabályos háromszögre teljesül.

Bizonyítás. Föltehető, hogy $\alpha = 60^\circ$, egyébként ugyanis az A-ból induló súlyvonalat az A-n túl meghosszabbíthatjuk addig a látókörig, amelynek pontjaiból a BC szakasz 60°-os szögben látszik (*1. ábra*). Az A'-ből induló súlyvonal így nő, az A'-vel szemközti oldal hossza továbbra is a.



1. ábra

Legyen tehát $\alpha = 60^\circ$, a BC oldal felezőpontja F, a körülírt kör nagyobbik BC ívének felezőpontja pedig A_1 (*2. ábra*). Ekkor $A_1F = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ és $AF = s$, így azt kell igazolnunk, hogy $AF \leq A_1F$ és pontosan akkor van egyenlőség, ha $A = A_1$, az ABC háromszög szabályos.



2. ábra

Jelölje O a kör középpontját. Ekkor a háromszög egyenlőtlenség szerint $AF \leq AO + OF = A_1O + OF = A_1F$ és valóban akkor van egyenlőség, ha A_1O és F egy egyenesre esnek, azaz $A = A_1$. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

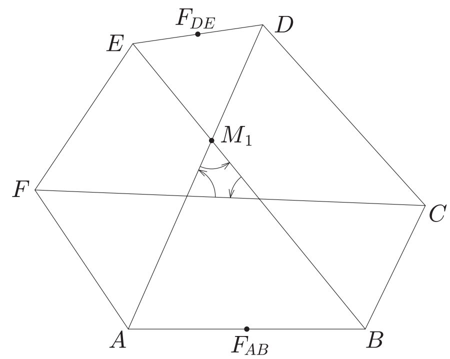
Legyenek a hatszög csúcsai pozitív körüljárás szerint betűzve (*3. ábra*) és tetszőleges PQ szakasz felezőpontját jelölje

F_{PQ}. Tegyük fel, hogy az AD és BE átlók M_1 metszéspontjára a pozitív AM_1B
$60°$. A segédtétel szerint

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq F_{AB}M_1 + M_1F_{DE}, \tag{1}$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha az ABM_1 és a DEM_1 háromszögek szabályosak. A háromszög egyenlőség szerint a jobb oldal alulról becsülhető:

$$F_{AB}M_1 + M_1F_{DE} \geq F_{AB}F_{DE}, \quad \text{ami a feltétel alapján} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \tag{2}$$



3. ábra

Egyenlőség van tehát (1)-ben is és (2)-ben is, így ha hatszögünkben AM_1B

60°, akkor a segédtétel szerint AM_1B
60° és az AM_1B, illetve a DEM_1 háromszögek szabályosak. Hatszögünkben tehát mindenképpen legfeljebb 60°-os pozitív irányú forgatás viszi az AD irányát a BE irányába (*3. ábra*).

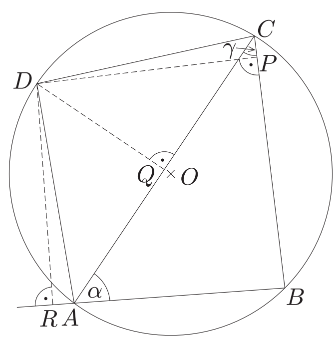
Ugyanez igaz BE és CF, illetve CF és DA irányára is. Mivel a három forgatás szögének összege 180°, így mindhárom forgatás pontosan 60°-os. Ekkor a segédtétel szerint mindhárom szemköztes oldalpár a végpontjaikat összekötő metsző átlókkal együtt két szabályos háromszöget alkot.

A hatszög minden csúcsában két 60°-os szög jön tehát létre, a hatszög szögei valóban egyenlők.

4. *Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. A D pontból a BC, CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai* *legyenek rendre P, Q és R. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.*

Kocsis Albert Tihamér megoldása. A szögfelező tétel szerint az $ABC\sphericalangle$ szögfelezője $\dfrac{AB}{BC}$, az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője pedig $\dfrac{AD}{DC}$ arányban osztja AC-t. Ha a két szögfelező az AC-n metszi egymást, akkor ennek a két aránynak meg kell egyeznie. Megfordítva, ha $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC} = \lambda$, akkor az AC szakasznak arra az M pontjára, amelyre $\dfrac{AM}{MC} = \lambda$, MB és MD felezik az ABC, illetve az ADC szögeket. Így azt kell igazolnunk, hogy $PQ = QR$ pontosan akkor teljesül, ha $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$, vagy másképpen a négyszög szemközti oldalainak a szorzata egyenlő.

Legyenek az ABC háromszög szögei α, β és γ. Thalész tétele szerint R és Q rajta vannak az AD átmérőjű körön. Ebben a körben az RQ húr hossza $AD \cdot \sin RAQ\sphericalangle = AD \cdot \sin\alpha$. Hasonlóan kapjuk a DC átmérőjű körben, hogy $QP = DC \cdot \sin\gamma$. Így $\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{DC \cdot \sin\gamma}{AD \cdot \sin\alpha}$.



Fölhasználva, hogy az ABC háromszögben a szinusztétel szerint

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{kapjuk, hogy} \quad \frac{PQ}{QR} = \frac{DC \cdot AB}{AD \cdot BC}.$$

Ebből az egyenlőségből leolvasható a bizonyítandó állítás: $PQ = QR$ akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög szemközti oldalainak a szorzata egyenlő.

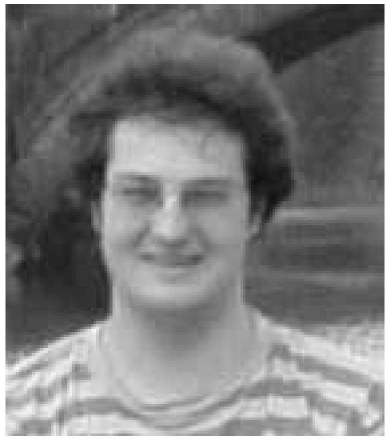
Megjegyzések. 1. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy $ABCD$ húrnégyszög, az állítás igaz a sík tetszőleges négy pontjára. Ismeretes másfelől, hogy húrnégyszögben a P, Q és R pontok egy egyenesen vannak, az ABC háromszög D ponthoz tartozó Simson-egyenesén. Ezt azonban a bizonyítás során nem kellett felhasználnunk.

2. Lehetséges, hogy az ABC és az ADC szögek szögfelezői egybeesnek, így az állítás úgy pontosítható, hogy $PQ = QR$ akkor és csak akkor teljesül, ha a két szögfelezőnek van közös pontja AC-n.

5. *Legyen n pozitív egész és legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olyan valós számok, amelyekre $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ teljesül.*
(*a*) *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(*b*) *Mutassuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1, \ldots, x_n$ számtani sorozatot alkotnak.*



Rácz Béla András megoldása. Jelölje a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát B, jobb oldalát J. Az i és j szerinti szimmetriát kihasználva

$$B=\left[2\sum_{1\le i<j\le n}|x_j-x_i|\right]^2 \quad \text{és} \quad J=\frac{2(n^2-1)}{3}\cdot 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2.$$

Az x_i sorozat rendezése miatt $i<j$ esetén $|x_j-x_i|=x_j-x_i$. Így

$$B=4\Bigg(\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\Bigg)^2. \tag{1}$$

Írjuk föl a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget az alábbi sorozatokra:

$$\begin{array}{l}
(\,x_2-x_1\,,\,x_3-x_1\,,\,\dots\,,\,x_n-x_1\,,\,x_3-x_2\,,\,x_4-x_2\,,\,\dots\,,\,x_n-x_2\,,\,\dots\,,\\
(\quad 1\quad,\quad 2\quad,\,\dots\,,\,n-1\,,\quad 1\quad,\quad 2\quad,\,\dots\,,\,n-2\,,\,\dots\,,
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\dots\,,\,x_{n-1}-x_{n-2}\,,\,x_n-x_{n-2}\,,\,x_n-x_{n-1}\,)\\
\dots\,,\quad 1\quad,\quad 2\quad,\quad 1\quad)\,.
\end{array}$$

Az első sorozat az x_j-x_i, a második pedig a megfelelő $j-i$ különbségekből áll.

$$B_1=\left[\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)(x_j-x_i)\right]^2\le\left[\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2\right]\left[\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2\right]=J_1. \tag{2}$$

A felírt egyenlőtlenség minden valós $x_1,x_2,\dots,x_n$ sorozatra teljesül és pontosan akkor van egyenlőség, ha $\dfrac{x_j-x_i}{j-i}=d$ állandó minden $j>i$-re. Ez pedig éppen annak a feltétele, hogy az x_i számtani sorozat legyen. J_1 második tényezője $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k^2$ alakba írható, ami a négyzetszámok, illetve a köbszámok összegére vonatkozó ismert összefüggések szerint összegezhető.

$$n\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^3=n\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{(n-1)^2n^2}{4}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Így

$$J_1=\frac{n^2(n^2-1)}{12}\cdot\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2=\frac{n^2}{16}J.$$

Ha belátjuk, hogy (2) bal oldalán $B_1=\dfrac{n^2}{16}B$, akkor készen vagyunk, hiszen így $B_1\le J_1$-ből valóban $B\le J$ következik és az egyenlőség valóban akkor teljesül, ha az $x_1,x_2,\dots,x_n$ számok számtani sorozatot alkotnak.

$$\frac{n^2}{16}B=\frac{n^2}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\right]^2=\left[\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)(x_j-x_i)\right]^2=B_1$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\text{(3)} \qquad \frac{n}{2}\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)(x_j-x_i),$$

hiszen a négyzetre emelt összegek tagonként nem negatívak.

Legyen $1\le k\le n$ és tekintsük x_k együtthatóját (3) bal oldalán:

$$p_k=\frac{n}{2}\left(\sum_{i<k}1-\sum_{k<j}1\right)=\frac{n}{2}\big[(k-1)-(n-k)\big].$$

Ugyanez a mennyiség (3) jobb oldalán:

$$q_k=\sum_{i<k}(k-i)-\sum_{k<j}(j-k).$$

A második összeg tagjait (-1)-gyel szorozva és beiktatva a $k-k=0$ tagot

$$q_k=\sum_{i<k}(k-i)+(k-k)+\sum_{k<j}(k-j)=\sum_{i=1}^{n}(k-i),$$

azaz $q_k=(k-1)+(k-2)+\ldots+(k-n)=\dfrac{n\big[(k-1)+(k-n)\big]}{2}$. Látható, hogy $p_k=q_k$, amivel a (3) azonosságot igazoltuk és a bizonyítást befejeztük.

6. *Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz az, hogy n^p-p nem osztható q-val.*

Kiss Demeter megoldása. Adott p prímre legyen q a $\dfrac{p^p-1}{p-1}$ olyan prímosztója, amelyre $q\not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Ilyen q prímszám létezik, ugyanis

$$\frac{p^p-1}{p-1}=1+p+\ldots+p^{p-1}\equiv 1+p\not\equiv 1 \pmod{p^2}$$

és így van olyan prímosztója, amelyik 1-től különböző maradékot ad p^2-tel osztva. Ez a q osztója (p^p-1)-nek is, tehát $p^p\equiv 1 \pmod q$. Ebből egyrészt $(p,q)=1$ következik, másrészt az, hogy a p rendje[1] $\pmod q$ a p osztójaként 1 vagy p.

Megmutatjuk, hogy p rendje $\pmod q$ nem lehet 1, azaz $p\not\equiv 1 \pmod q$. Ellenkező esetben ugyanis $0\equiv\dfrac{p^p-1}{p-1}=1+p+\ldots+p^{p-1}\equiv p \pmod q$, ami ellentmondás.

A p rendje $\pmod q$ tehát éppen p. Mivel $(p;q)=1$, a kis Fermat-tétel szerint $p^{q-1}\equiv 1 \pmod q$. Ekkor a p rendje osztója a kitevőnek, $p\mid q-1$, továbbá q választása miatt $p\nmid\dfrac{q-1}{p}$. Most már készen állunk annak bizonyítására, hogy a talált q prímszámra teljesül a feladat állítása.

[1] Ha a q prímszám nem osztója az r egész számnak, akkor végtelen sok olyan pozitív egész kitevő létezik, amelyre $r^n\equiv 1 \pmod q$. E kitevők legkisebbikét az r rendjének nevezik $\pmod q$. Igazolható, hogy $r^n\equiv 1 \pmod q$ akkor és csak akkor teljesül, ha n, a kitevő, az r rendjének a többszöröse. Ezt a tulajdonságot többször használjuk a bizonyítás során.

Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen n egészre $q \mid n^p - p$, azaz $n^p \equiv p \pmod q$. Ekkor $(q,n) = 1$, hiszen láttuk, hogy $(q,p) = 1$. Így a kis Fermat-tétel szerint $n^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, másrészt indirekt feltevésünkből

$$n^{q-1} = (n^p)^{\frac{q-1}{p}} \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod q,$$

vagyis

$$1 \equiv p^{\frac{q-1}{p}} \pmod q$$

következik. Ez azonban nem lehetséges, hiszen p, ami a p rendje $(\bmod\ q)$, nem osztója $\dfrac{q-1}{p}$-nek. A q prímszám tehát valóban nem osztója $(n^p - n)$-nek.