I. megoldás. Jelöljük a vizsgált kifejezést $f(x)$-szel. Az $f(x)$ minden valós x számra értelmezve van, hiszen a gyökjelek alatt különböző számok négyzetösszege szerepel, ami mindig pozitív. Így $f(x)$ értéke is mindig pozitív. Nem negatív számok körében a négyzetre emelés monoton művelet, ezért $f^2(x)$ ugyanott minimális, ahol $f(x)$.

$$f^2(x) = \left(\sqrt{2x^2+1+2x} + \sqrt{2x^2+1-2x}\right)^2 = 4x^2+2+2\sqrt{4x^4+1}.$$

Erről a kifejezésről közvetlenül megállapítható, hogy legkisebb értékét $x=0$-nál veszi fel.

Piros Sándor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

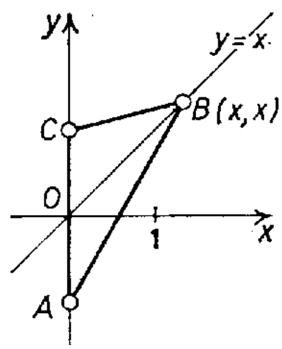
II. megoldás. Tekintsük azt a háromszöget, amelynek csúcsai a síkbeli $(x,\ y)$ derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;\ -1)$, $B(x;\ x)$, $C(0;\ 1)$ (l. ábra). A háromszög egyenlőtlenség alapján

$$AC \le AB + BC.$$

Az egyenlőtlenségben szereplő távolságokat a koordinátákkal kifejezve

$$2 \le \sqrt{x^2+(x+1)^2} + \sqrt{x^2+(x-1)^2}$$

adódik. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ABC háromszög elfajuló, és B az AC oldalszakasz pontja.



Ha x változik, B az $y=x$ egyenes mentén mozog. Az egyenlőség tehát akkor és csak akkor következik be, ha B az origóban van, vagyis $x=0$. Mivel az egyenlőtlenség jobb oldalán éppen a vizsgált kifejezés szerepel, ezzel a feladat kérdésére meg is adtuk a választ.

Az egyenlőtlenség bal oldalán a minimum értéke is – mintegy magától – előbukkant.

Ármós Lajos (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A közölt megoldás alapján a feladat könnyen általánosítható.

III. megoldás (vázlat). A feladatot a differenciálszámítás felhasználásával oldjuk meg. Az $f(x)=\sqrt{x^2+(x+1)^2}+\sqrt{x^2+(x-1)^2}$ minden valós x számra értelmezett folytonos és differenciálható függvény, deriváltja

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+2x+1}} + \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

Ez szintén mindenütt értelmezett és folytonos függvény.

Az $f'(x)=0$ egyenletet megoldva egyetlen gyök, $x=0$ adódik. Mivel a derivált függvény folytonos, a $(-\infty;\ 0)$ és a $(0;\ \infty)$ intervallumban állandó előjelű; $f'(-1) = -1-\dfrac{3}{\sqrt5} < 0$ és $f'(1) = \dfrac{3}{\sqrt5} > 0$ alapján $(-\infty;\ 0)$-ban negatív, $(0;\ \infty)$-ben pozitív. Ezek szerint $f(x)$ a $(-\infty;\ 0)$-ban fogyó, a $(0;\ \infty)$-ben növekedő. Így $f(x)$-nek $x=0$-nál abszolút minimuma van.

Spilkó József (Tatabánya, Árpád Gimn., IV. o. t.)