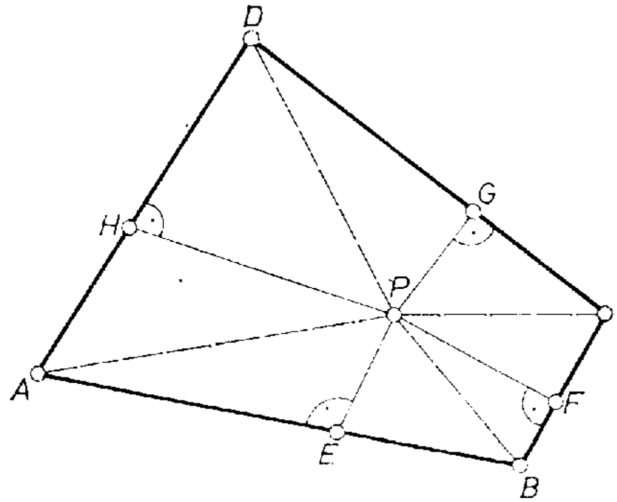
Pitagorasz tételét felírva az AEP, BFP, CGP, DHP, valamint EBP, FCP, GDP, HAP derékszögű háromszögekre (1. ábra), fejezzük ki az állítás bal és jobb oldalán álló összeadandókat:

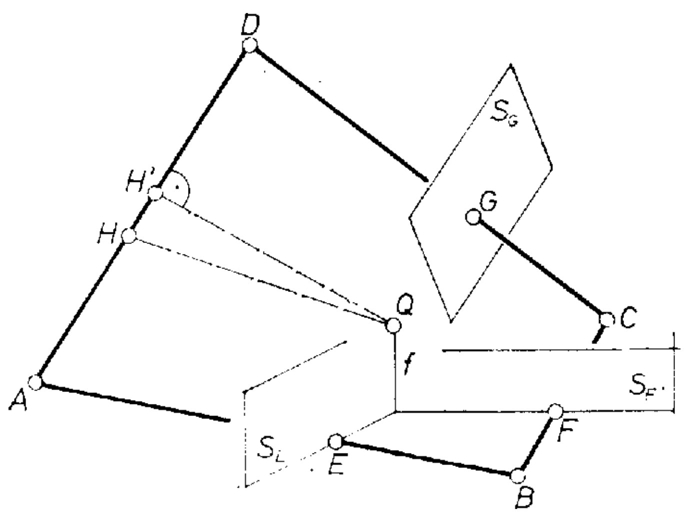
$$AE^2 = AP^2 - PE^2, \quad EB^2 = BP^2 - PE^2,$$
$$BF^2 = BP^2 - PF^2, \quad FC^2 = CP^2 - PF^2,$$
$$CG^2 = CP^2 - PG^2, \quad GD^2 = DP^2 - PG^2,$$
$$DH^2 = DP^2 - PH^2, \quad HA^2 = AP^2 - PH^2.$$

A bal és a jobb oldalon álló tagok helyébe a fenti különbségeket írva látható, hogy valóban fennáll az egyenlőség.



1. ábra

Vizsgáljuk most a feladat második részét! Megmutatjuk, hogy a szereplő feltételek mellett igaz az első részben bizonyított tétel megfordítása, azaz ha teljesül (1), akkor a kérdéses síkok egy ponton mennek át.



2. ábra

Az E-n átmenő, AB egyenesre merőleges és az F-en átmenő, BC egyenesre merőleges síkok különbözők és nem párhuzamosak, mivel az A, B, C pontok nincsenek egy egyenesen (különben ugyanis A, B, C, D egy síkban lennének). E két sík tehát metszi egymást, legyen metszésvonaluk f (2. ábra). Hasonlóan a G-n átmenő, DC egyenesre merőleges sík nem tartalmazza f-et és nem párhuzamos f-fel, f tehát döfi ezt a síkot, legyen a döféspont Q. Ekkor Q vetülete az AB, BC, CD egyenesen rendre E, F, G. Legyen a Q pontnak az AD egyenesen levő vetülete H'. Ekkor az első rész állítása szerint

$$AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH'^2 = EB^2 + FC^2 + GD^2 + H'A^2. \tag{2}$$

(1) és (2) különbségét képezve rendezés után kapjuk, hogy

$$DH^2 - HA^2 - DH'^2 - H'A^2. \tag{3}$$

A távolságokat előjeles távolságoknak tekintve, és felhasználva, hogy $DH + HA = DH' + H'A = DA$, kapjuk, hogy $DH' = DH$, azaz $H' = H$.

Tehát a H-n átmenő és az AD egyenesre merőleges sík is átmegy a Q ponton, vagyis a négy vizsgált sík egy ponton megy át.