Első nap

1. Legyen A az $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ halmaz egy 101 elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy találhatók olyan $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ számok az S halmazban, amelyekre az

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad (j = 1, 2, \ldots, 100)$$

halmazok páronként diszjunktak.

2. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló (a, b) párt, amire

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

pozitív egész.

3. Adott egy konvex hatszög, amelyben bármely két szemközti oldalra teljesül a következő tulajdonság: az oldalak középpontjai közötti távolság $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese a hosszuk összegének. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög valamennyi szöge egyenlő.

(Az $ABCDEF$ konvex hatszögben három szemközti oldalpár van: AB és DE, BC és EF, CD és FA.)

Második nap

4. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. A D pontból a BC, CA és AB egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek rendre P, Q és R. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $PQ = QR$, ha az $ABC\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ szögek szögfelezőinek metszéspontja az AC egyenesen van.

5. Legyen n pozitív egész és legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olyan valós számok, amelyekre $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ teljesül.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Mutassuk meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1, \ldots, x_n$ számtani sorozatot alkotnak.

6. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan q prímszám, amivel minden n egész számra igaz az, hogy $n^p - p$ nem osztható q-val.