Kós Rita – Kós Géza

Amikor az exponenciális függvény és a logaritmus fogalmát tanuljuk, a 2-es és a 10-es alap választása tűnik a legkézenfekvőbbnek. A 2-es alap előnye, hogy a kis pozitív egész számok között sok olyan van, aminek a 2-es alapú logaritmusa egész. A 10-es alap előnye pedig az, hogy sokjegyű számok logaritmusát is nagyon könnyű egyetlen, néhány oldalas logaritmustábla segítségével meghatározni. Amilyen természetesnek tűnik a 2-es és a 10-es alapú logaritmus, olyan megdöbbentő, hogy „természetesnek” mégsem ezeket nevezzük, hanem egy teljesen mesterséges számot választunk alapul. Ezt a mesterséges alapot Euler nyomán e-vel jelöljük, értéke közelítőleg $e \approx 2{,}71828182845904523536$.

Az e számot a legtöbb tankönyv az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékeként, tehát egy 1^∞ alakú határértékként definiálja. Mások (Eulerhez hasonlóan) így definiálják: $e = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots$. Egyik definíció sem alkalmas arra, hogy az e-vel közvetlenül aritmetikai műveleteket végezzünk. Sőt, Euler, Liouville és Hermite eredményeiből azt is tudjuk, hogy az e szám semmilyen egész együtthatós polinomnak sem gyöke; más szóval, a π-hez hasonlóan, *transzcendens* [3]. Az e számmal nem könnyű számolni.

Különösen a komplex függvénytan mutatott rá, hogy az e^x függvény nagyon szoros kapcsolatban áll a trigonometrikus függvényekkel, és ezáltal az e közeli rokona a π-nek. Nagyon sok olyan eset van, amikor ez a két szám együtt fordul elő egy matematikai eredményben, például a Stirling-formula szerint $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Az e szám tehát nem azért természetes, mert könnyű vele számolni, hanem mert olyan speciális tulajdonságai vannak, amelyek matematikai vizsgálatokban sokkal fontosabbak, mint az aritmetikai kezelhetőség. Ebben a cikkben az egyik – a legfontosabb – tulajdonságát fogjuk vizsgálni, amely ott áll az összes többi hátterében.

Egy kis matematikatörténet

A XV–XVI. század Európájában egyre fontosabbá vált az ipar, a hajózás, a csillagászat, a kereskedelem, mely területek nemcsak műszaki, hanem matematikai vívmányoknak is köszönhették azt, hogy egyre professzionálisabbá váltak. A pénzemberek számára oly fontos kamatos kamat számításához táblázatokat készítettek (pl. Simon Stevin). Az ezekkel való számolást szerette volna Joost Bürgi (1552–1632) felgyorsítani az általa készített táblázat segítségével. A svájci műszerkészítő mester adott p kamatláb mellett az $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$, $(n=0,1,2,\dots)$ mértani sorozathoz elemenként a $0, 10, 20, \dots, 10n$ számtani sorozat elemeit rendelte. Így az első sorozat bármely két elemének szorzatához éppen az a szám tartozik, amely a megfelelő számtani sorozatból való elemek összege. A két sorozatot egymástól színezéssel különböztette meg (piros–fekete). A ma már természetes jelöléssel tehát $\log_a\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n = 10n$.

A táblázat ugyan már 1611-ben elkészült, ám csak kilenc évvel később jelent meg. Ennek köszönhette John Napier skót matematikus, hogy először az övé vált ismertté (1614). Napier munkája annak a mozgásnak a közelítő leírásából származik, amikor valaki egy d hosszúságú úton halad úgy, hogy sebességének mérőszáma minden pillanatban megegyezik a hátralevő út hosszával. Az időt rövid, λ hosszúságú szeletekre vágta, és a sebességet minden szeletben állandónak vette. Az így kapott út–idő értékekből táblázatot készített. A megfeleltetést a görög *logosz,* azaz arány és *arithmosz,* azaz szám összegyúrásából latinosan *logaritmusnak* nevezte el.

szelet	0	1	2	...	k	...
hátralevő út	d	$(1-\lambda)d$	$(1-\lambda)^2 d$	...	$(1-\lambda)^k d$	...
eltelt idő	0	λ	2λ	...	$k\lambda$	...

A táblázat elkészítésekor Napier a λ számot 10^{-7}-nek választotta (d-t pedig 10^7-nek), mai szóhasználattal tehát azt is mondhatjuk, hogy Napier-féle táblázatban a logaritmus alapja $\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^{10^7}$.

Napier munkáját az Oxfordi Egyetem geometria professzora, Henry Briggs fejlesztette tovább. Elsőként azt szerette volna, hogy $\log 1 = 0$, azaz az alapszakasz hossza 10^7 helyett egységnyi legyen. Másodsorban kívánatosnak tartotta, hogy a 10 logaritmusa tíznek egy hatványaként álljon elő. Számos lehetőség megvitatása után a $\log 10 = 1$ mellett döntöttek, ami nemcsak a tízes alapú logaritmus megszületését jelentette, hanem magának a logaritmus *alapjának* megfogalmazását is. (Tehát ha egy szám a-nak az L-edik hatványa, akkor a szám a alapú logaritmusa L.)

A $2{,}718\dots$ szám első ismert előfordulását Napier *Descriptio* című műve angol fordításának függelékében találhatjuk. (A függeléket feltehetőleg William Oughtred írta.) Itt szerepel a következő megállapítás: $\log_a 10 = 2{,}302585$, ahol $a \approx 2{,}71828$. Egy másik érdekes korai eredmény Gregory of Saint-Vincent nevéhez fűződik, aki 1647-ben a derékszögű hiperbola alatti területet számította ki. Szerinte az $xy = 1$ egyenletű hiperbola és az x-tengely egységnyi területet fog közre az $x = 1$-től kezdve $x = e$-ig.

Euler az e számot az 1727–28-ból származó *Elmélkedés az ágyúzás legújabb tapasztalatairól* (Meditatio en experimenta explosione tormentorum nuper instituta) című kéziratában használta először. Később egy – Goldbachnak írt –

levelében találkozhatunk az e-vel (1731), nyomtatásban legelőször 1736-ban jelent meg a *Mechanica* című tanulmányban.

A szimbólum megválasztásának miértjéről csak találgatni lehet. Vannak, akik szerint az e az *exponenciális* szó kezdőbetűje, mások az a, b, c, d – az akkori matematikát művelők között bevetten használt – betűk sorában következőt látják benne. A rosszmájúak és irigyek véleménye természetesen az, hogy Euler a számot önmagáról nevezte el.

Euler megmutatta, hogy az e szám irracionális. 1844-ben Liouville bebizonyította, hogy egyetlen egész együtthatós másodfokú polinomnak sem gyöke, sőt, Hermite 1873-ban azt is bebizonyította, hogy transzcendens.

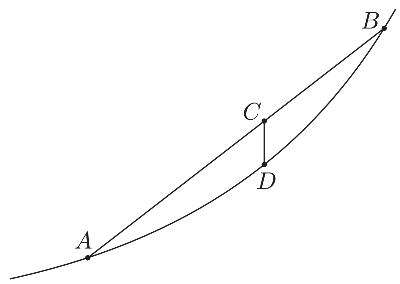
A komputertechnika fejlődésével egyre több jegyét számolják ki e-nek, a minél pontosabb meghatározásért folyó verseny napjainkban is tart. (1999-ig 10^9 nagyságrendű tizedes jegyet állapítottak meg.)

Az exponenciális függvény meredeksége

Az e szám legérdekesebb és egyben legfontosabb tulajdonsága az exponenciális és logaritmusfüggvények meredekségével kapcsolatos.

A különféle alapú exponenciális függvények grafikonjait a középiskolából viszonylag jól ismerjük. Az $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton nő, ha $a > 1$, szigorúan monoton fogy, ha $0 < a < 1$ és azonosan 1, ha $a = 1$. Minden esetben igaz az, hogy a grafikon egy folytonos görbe, amely átmegy a $(0; 1)$ ponton.

Tetszőleges alap esetén igaz, hogy az a^x függvény konvex. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a grafikon bármelyik két pontját egy egyenes szakasszal összekötve, a szakasz a grafikon fölött helyezkedik el (*1. ábra*).



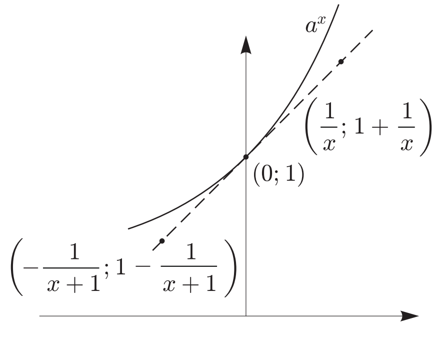
1. ábra

A konvexitást formálisan is leírjuk. Legyen $A = (x; a^x)$ és $B = (y; a^y)$ a két végpont. Az AB szakasz egy belső C pontját úgy határozzuk meg, hogy a szakaszt valamilyen arányban felosztjuk. Ha az arány $q : p$, ahol p, q pozitív számok és $p + q = 1$, akkor az osztópont koordinátái $C = (px + qy; pa^x + qa^y)$, a grafikon C „alatti” pontja pedig $D = (px + qy; a^{px+qy})$. Az tehát, hogy az exponenciális függvény konvex, azt jelenti, hogy $a^{px+qy} \le pa^x + qa^y$ teljesül bármelyik lehetséges x, y, p, q számnégyes esetén.

Azt, hogy az exponenciális függvény konvex, a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség segítségével bizonyíthatjuk be. Az a^{px+qy} és $pa^x + qa^y$ kifejezések nem mások, mint az a^x és a^y számok súlyozott mértani, illetve számtani közepe a p és q súlyokkal.

Az exponenciális függvény grafikonjához bármelyik pontjában, így a $(0; 1)$ pontban is érintőt húzhatunk. (Ennek bizonyításától most eltekintünk.) Az érintő meredeksége természetesen attól függ, hogy mi az alap. A továbbiakban arra vagyunk kiváncsiak, hogy milyen alap esetén lesz a $(0; 1)$-ben húzott érintő meredeksége 1, azaz mikor érinti az exponenciális függvény az $y = x + 1$ egyenest. A keresett alapot jelöljük – egyelőre – a-val.

Az a számra jó becsléseket az érintő $(0; 1)$-hez közeli pontjai segítségével kaphatunk. Először vegyünk egy nagy pozitív valós számot (x) és tekintsük az $\left(\frac{1}{x}; 1 + \frac{1}{x}\right)$ pontot. A konvexitás miatt a teljes érintő a grafikon alatt van (kivéve az érintési pontot, *2. ábra*), tehát $a^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$; x-edik hatványra emelve $a > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.



2. ábra

Második becslésünkhöz tekintsük a $\left(-\frac{1}{x+1}; 1-\frac{1}{x+1}\right)$ pontot. Ez a pont is a grafikon alatt van, tehát $a^{-\frac{1}{x+1}} > 1-\frac{1}{x+1}$. Ezúttal $-(x+1)$-edik hatványra emelve (mivel a kitevő negatív, az egyenlőtlenség iránya megfordul!),

$$a < \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Összefoglalva, a keresett alapra teljesülnie kell, hogy tetszőleges $x>0$ esetén

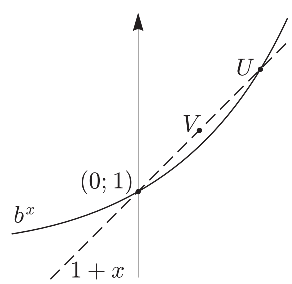
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < a < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Itt azonnal meg lehet kérdezni, hogy az x helyére nagyobb számot írva erősebb becslést kapunk-e. Megmutatjuk, hogy így van, az $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ függvény monoton nő, az $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ függvény pedig monoton fogy.

Legyen $0<u<v$ két tetszőleges pozitív valós szám. Először azt fogjuk megmutatni, hogy $\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} < \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v}$. Legyen $b=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}$; az $x \mapsto b^x$ függvény grafikonja átmegy az $U=\left(\frac{1}{u}; 1+\frac{1}{u}\right)$ ponton (*3. ábra*).

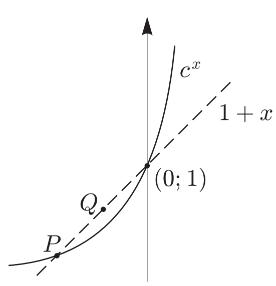
A konvexitás miatt a $V=\left(\frac{1}{v}; 1+\frac{1}{v}\right)$ pont a b^x függvény grafikonja fölött van, tehát $1+\frac{1}{v} > b^{\frac{1}{v}}$. A v-edik hatványokat véve

$$b=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} < \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v}.$$



3. ábra

Legyen most $c=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}$. Az $x \mapsto c^x$ függvény grafikonja átmegy a $P=\left(-\frac{1}{u+1}; 1-\frac{1}{u+1}\right)$ ponton. A $Q=\left(-\frac{1}{v+1}; 1-\frac{1}{v+1}\right)$ pont a grafikon fölött van, tehát $c^{-\frac{1}{v+1}} < 1-\frac{1}{v+1}$. Ezt $-(v+1)$-edik hatványra emelve az egyenlőtlenség iránya ismét megfordul, $c=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1} > \left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1}$ (*4. ábra*).



4. ábra

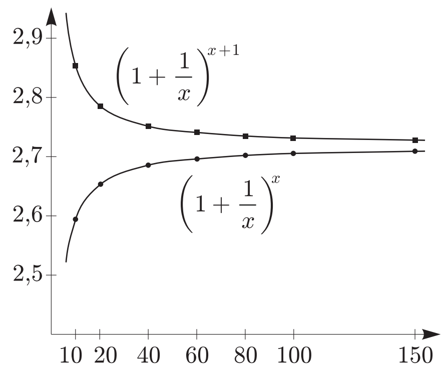
Természetesen mindkét függvény monotonitását közvetlenül is igazolhatjuk a súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségekkel. Írjuk fel az $1+\dfrac{1}{u}$ és 1 számokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az u, illetve $v-u$ súlyokkal:

$$\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u \cdot 1^{v-u}\right)^{\frac{1}{v}} < \frac{u\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)+(v-u)\cdot 1}{v},$$
$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u < \left(1+\frac{1}{v}\right)^v.$$

Hasonlóan írjuk fel a súlyozott harmonikus és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget is az $u+1$ és $v-u$ súlyokkal:

$$\frac{v+1}{\frac{u+1}{1+\frac{1}{u}}+\frac{v-u}{1}} \le \left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}\cdot 1^{v-u}\right)^{\frac{1}{v+1}},$$
$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^{v+1} < \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+1}.$$

A monoton növekvő alsó becslés és a monoton fogyó felső becslés hányadosa 1-hez tart. Ebből következik, hogy a két függvénynek közös határértéke van a végtelenben (*5. ábra*). Ha a közös határértéket (amit most már nyugodtan nevezhetünk e-nek) választjuk az exponenciális függvény alapjának, a $(0;1)$ pontbeli érintő iránya éppen $45°$-os lesz. Az e számnak ez az a tulajdonsága, ami miatt a matematika legkülönfélébb területein felbukkan.



5. ábra

Az e^x függvénynek nem csak a $(0;1)$-beli meredeksége érdekes. A grafikon tetszőleges $(x;e^x)$ pontjában az érintő meredeksége éppen e^x, vagy más szóval, $(e^x)'=e^x$. Ez a tulajdonság is az előbb látottak egyszerű következménye.

A célunk az volt, hogy rámutassunk az okra, ami miatt az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke különleges, hogy miért éppen ezt a számot érdemes az exponenciális és a logaritmusfüggvény alapjának választani.

Egy tankönyvben, ahol a gondos, precíz felépítés nagyon fontos, a sorrend többnyire teljesen más. Az e számot jóval azelőtt szokás definiálni, mint hogy érintőkről és azok meredekségéről, azaz differenciálásról szó esne. Előbb – a sorozatok határértékéről szóló fejezetekben – bebizonyítjuk, hogy az $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékét elnevezzük e-nek. Csak később, a függvények határértéke és a folytonosság fogalmának bevezetése után, a differenciálásról szóló fejezetben találkozunk azzal, hogy az e^x függvény milyen érdekes a deriválás szempontjából.

Feladatok

1. Legyen n tetszőleges pozitív egész. Adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots = e$.

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a valós szám esetén az $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ függvénynek van határértéke a ∞-ben.

4. Definiáljuk az exp függvényt a következőképpen: $\exp(a)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$. Mutassuk meg, hogy $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$, és valójában $\exp(a)=e^a$.

5. Bizonyítsuk be, hogy $e^x = 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$.

Hátha valaki nem ismeri

A differenciáloperátor összetalálkozik egy függvénnyel. Azt mondja neki az operátor:
– Add nekem az értékkészletedet, különben megderivállak!
– Hahaha! Én vagyok az e^x.

Az e tizedes jegyeinek megjegyzésére több vicces mondatot, verset gondoltak ki, amelyekben minden számjegynek egy-egy szó betűinek száma felel meg, például

„`By omnibus I traveled to Brooklyn.`"

„`We present a mnemonic to memorize a constant so exciting that Euler exclaimed: '!' when first it was found, yes, loudly '!'. My students perhaps will compute` e`, use power or Taylor series, an easy summation formula, obvious, clear, elegant!`" (Barel, 1995)

Irodalom

[1] Eli Maor: e – *The history of a number,* Princeton University Press (Princeton, New Jersey, 1994).

[2] Sain Márton: *Nincs királyi út,* Gondolat (Budapest, 1986).

[3] Freud Róbert – Gyarmati Edit: *Számelmélet,* Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest, 2000), 369–401. oldal.

[4] `http://mathworld.wolfram.com/e.html`

[5] `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html`